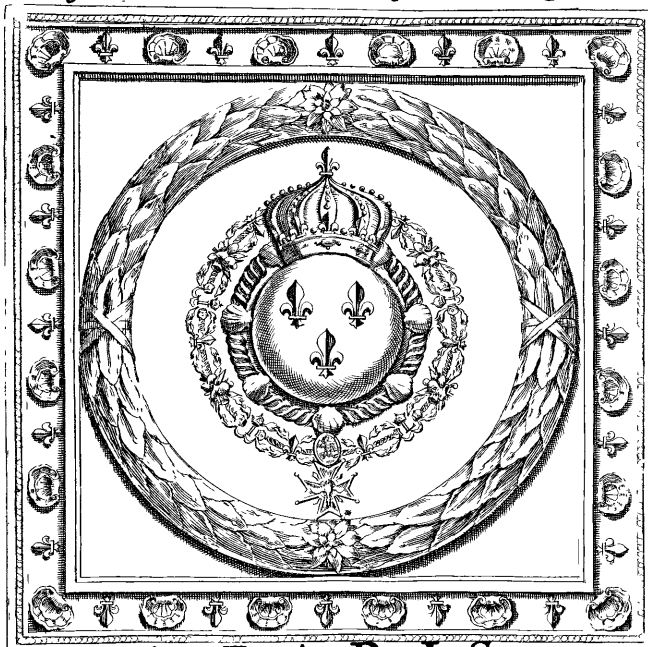


RESOLUTION
DES
QUATRE PRINCIPAUX
PROBLEMES
D'ARCHITECTURE.

DEDIÉE
A MONSIEUR COLBERT.
MINISTRE ET SECRETAIRE D'ESTAT,
SURINTENDANT DES BASTIMENS,
ARTS, ET MANUFACTURES DE FRANCE.

*Par M. FRANÇOIS BLONDEL, de l'Academie Royale des Sciences, Directeur & Professeur en
l'Academie Royale d'Architecture, & des Mathematiques au College Royal, Maréchal de Camp
és Armées du Roy, & Maître des Mathematiques de Monseigneur le Dauphin.*



A PARIS.
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DC. LXXIII.





A
MONSIEUR COLBERT,
 MINISTRE ET SECRETAIRE D'ESTAT,
 SURINTENDANT DES BASTIMENS.
 ARTS, ET MANUFACTURES DE FRANCE.



ONSEIGNEUR,

L'estime que vous avez pour les beaux Arts, oblige tous ceux qui en font profession, de vous regarder comme leur Protecteur. Chacun vous offre les fruits de son travail comme des biens qui vous appartiennent; & je vous presente celui-cy dans le mesme sentiment, & avec une parfaite reconnoissance de la bonté que vous avez eüe de m'asseûrer qu'il ne vous seroit pas desagréable.

Vous sçavez, MONSIEUR, que toutes les parties des Mathematiques sont recommandables par les avan-

E P I T R E.

tages qu'elles apportent dans les affaires du monde ; qu'elles sont utiles dans la Guerre & dans la Paix ; & que les grands Hommes s'en servent en tout temps , ou pour exercer leur valeur , ou pour montrer leur magnificence.

Néanmoins l'Architecture est celle qu'ils considèrent le plus , parce qu'elle achève , pour ainsi dire , leur réputation , & qu'elle conserve le souvenir de leurs victoires , en leur élevant de superbes Trophées.

Vn grand Roy comme le nostre , dont la vie est pleine de merveilles , & qui a fait tant de choses qui paroissent incroyables à la posterité , doit en laisser des témoignages immortels , qui confirment ceux de l'Histoire , & qui empêchent que les siècles suivans ne la traittent de fabuleuse. Et rien ne le peut mieux faire que l'Architecture. Certainement, MONSIEUR, j'ose dire que cét Art admirable servira plus à éterniser la memoire de LOUIS LE GRAND, que tous les autres Arts qui se vantent de donner l'immortalité.

Mais, MONSIEUR, c'est un bonheur bien particulier pour nous , qui en faisons nostre principale estude , que Sa Majesté se soit reposée sur vos soins , pour remettre l'Architecture dans son premier lustre. Ce bel Art avoit besoin que vous luy donnassiez un peu de ce temps précieux que vous employez si utilement au service du Roy & de l'Estat , afin qu'il puisse non seulement égaler aujourd'huy ses ouvrages à la beauté de l'Antique , mais mesme les porter à un degré de perfection , où les anciens Edifices n'ont jamais esté , ny dans la Grece , ny dans l'Empire Romain.

E P I T R E.

Et comme le nom du Roy surpasse maintenant celui de tous les Heros de l'antiquité, il falloit un Ministre, aussi habile & aussi zélé pour sa gloire que vous l'estes, pour laisser dans la France des Monumens si magnifiques & si durables de la prospérité de son regne, qu'ils puissent effacer un jour la grandeur de ces anciens Edifices, dont le temps semble respecter les ruines.

Pendant que la renommée va répandre par toute la terre le bruit de ses Exploits & célébrer ses Conquestes & les prodiges inouïs de son courage, il est bien juste que l'Architecture & tous les beaux Arts travaillent à l'envy pour relever l'éclat de ses Triomphes, & consacrer la mémoire de ses grandes actions. Je voudrois bien, MONSEIGNEUR, que ce Traité y pût contribuer quelque chose : Du moins vous puis-je assurer que je ne l'ay composé que dans cette vue, & pour communiquer au public ce que je puis avoir acquis de nouvelles connoissances touchant les pratiques les plus difficiles qui se rencontrent dans les Bastimens. Je m'estimeray trop récompensé de mon travail, si vous me faites la grace de l'approuver, & d'estre persuadé que je suis avec beaucoup de respect,

MONSEIGNEUR,

Vostre tres-humble & tres-obéissant serviteur,
BLONDEL.

RESOLUTION DES QUATRE PRINCIPAUX PROBLEMES D'ARCHITECTURE.

PREMIER PROBLEME RESOLU.

DÉCRIRE Géométriquement en plusieurs manières, & tout d'un trait, le Contour de l'enflûre & diminution des Colonnes.

SECOND PROBLEME RESOLU.

L'APOLLONIUS François des Taffions; ou trouver une Section Conique qui touche trois lignes droites données en un mesme plan, & deux de ces lignes en un point donné de chacune: ou bien, décrire Géométriquement les Arcs rampans sur toutes sortes de pieds droits & de hauteur.

TROISIEME PROBLEME RESOLU.

TROUVER Géométriquement les joints de teste de toutes sortes d'Arcs rampans.

QUATRIEME PROBLEME RESOLU.

TROUVER la ligne sur laquelle les Poutres doivent estre coupées en leur hauteur & largeur, pour les rendre par tout également fortes & résistantes.

Avec la démonstration des Pratiques, accompagnées de diverses réflexions sur le mouvement, sur la proportion Harmonique, & sur les erreurs de Pappus au sujet de l'inscription des trois médiétés au demicercle, & de Galilée au sujet du dernier Probleme.

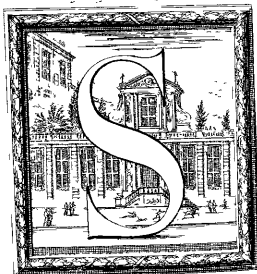


RESOLUTION DES QUATRE PRINCIPAUX PROBLEMES D'ARCHITECTURE.

PREMIER PROBLEME RESOLV.

Décrire Géométriquement en plusieurs manières & tout d'un trait, le Contour de l'enflure & diminution des Colonnes.

PREMIER DISCOURS.



Il les divers emplois que j'ay eûs pour le service du Roy chez les Etrangers & dans les principales Provinces de ce Royaume, m'ont donné l'avantage de pouvoir considérer à loisir la plus grande partie des Bâtimens anciens & modernes qui sont dans le monde ; & si cette facilité jointe à une inclination particulière que j'ay toujours eüe pour l'Architecture & qui m'a fait soigneusement rechercher ce qui pouvoit estre de plus remarquable en chacun d'eux, peut m'avoir acoustumé les yeux à quelque discernement de ce qu'on appelle Grand & Beau dans cet Art : Il me semble que j'ay quelque droit de dire mes sentimens sur son sujet & d'assurer que l'Architecture a besoin d'étude, pour arriver à sa perfection. Et quoy que je ne sois pas assez sçavant pour me vanter de connoître ce qui luy manque, (cét Art supposant un trop grand amas de connoissances profondes & une experience consommée ;) je ressens au moins une joye extraordinaire, lors que je voy qu'il s'y fait quelque progrès.

C'est ce qui fait que j'ay beaucoup estimé la pensée de celuy qui proposa pour *Estrenes à tous les Architectes*, au commencement de l'année 1664. un *Paradoxe*, comme il dit, c'est à dire, un *Probleme à résoudre touchant la perfection de l'ensûre ou évanouissement des Colonnes, touchée imparfaitement par Vitruve & non encore résoluë ny réglée qu'imparfaitement, quoy qu'Architectoniquement elle le puisse estre parfaitement*, qui sont les termes dont il s'est servi.

Et j'ay crû, dis-je, qu'un homme estoit doublement louable, qui ne se contentant pas de rechercher ce qui n'est pas encore connu dans les Sciences, & de consacrer au Public le fruit de son travail & de ses veilles, vouloit encore exciter les autres à son exemple, & réveilloit leur vertu endormie, en leur proposant à résoudre ce qu'il auroit déjà pû reconnoître par son étude. D'autant plus que c'est à un sentiment tout semblable que nous devons ce que nous avons de plus beau dans les Mathématiques, & qu'il paroist qu'il ne s'est jamais fait de plus notable progrès dans ces sciences, que lors que les grands Genies se sont, dans divers siècles, proposés l'un à l'autre des questions, & que par une espece d'émulation honneste leur ame s'est enflammée de cette genereuse ambition, qui nous a produit des Ouvrages si excellens, qu'ils semblent estre plutôt partis de l'intelligence des Anges, que de la meditation laborieuse de l'esprit humain.

Et comme l'Architecture n'a receû ce qu'elle a de bon & de magnifique que des sciences Mathématiques, qui par l'indubitable verité de leurs démonstrations remplissent entièrement la capacité de nostre esprit, & ne luy laissent rien à desirer sur le sujet qu'elles luy ont expliqué : Il est aisé de comprendre que c'est d'elles qu'elle doit encore attendre ce qui manque à sa perfection; & que cette lumière, par qui l'on connoist la difference qu'il y a de pouvoir rendre raison de son Ouvrage, ou de travailler en tastonnant, & à l'aveugle, ne luy peut venir que des mains liberales de la Géometrie.

Combien donc seroit-il à souhaitter, que ceux qui travaillent en Architecture voulussent aussi s'appliquer aux Mathématiques, ou que ceux qui se sont avancez dans ces sciences donnassent aussi quelque partie de leur temps à l'Architecture ? Et l'on doit pour ce sujet estimer & recevoir agréablement toutes les choses qui peuvent contribuer à porter les hommes à cette étude, au nombre desquelles je mettrois ce *Paradoxe*, si l'Auteur s'y estoit un peu plus clairement expliqué qu'il n'a fait, & s'il avoit donné à entendre quelle est cette manière de diminuer les Colonnes, qu'il appelle *Parfaite* : parce que ces sortes de dispositions, qui ne sont que pour la satisfaction de l'œil, & qui n'ont point de fondement certain, ny arresté dans la nature, dépendent tellement du goust, & de la diversité des opinions, qu'une Colonne peut paroistre aux uns trop *Svelte*, ainsi que les Italiens les appellent, ou délicate, que d'autres la trouveront trop écrasée.

De sorte, qu'il semble que pour travailler avec quelque fruit à la solution de son *Paradoxe*, il auroit esté juste qu'il eust déterminé ce qu'il entend par ce mot de *Parfaitement*, & qu'on pût comprendre, si cette façon de description qu'il propose à résoudre *Architectoniquement*, est déjà en quelque usage, au moins mécanique, parmi les Ouvriers ; ou si c'est une manière toute nouvelle, & d'une forme differente de toutes celles dont on a jusqu'icy diminué les Colonnes : estant vray que ces Propositions vagues & indéterminées, & en l'explication desquelles le sort a plus de part que le raisonnement ou la vivacité de l'imagination, sont d'autant plus defectueuses, que l'honneur même qui seroit dû à celuy qui auroit expliqué l'énigme, ne dépend que du caprice de celuy qui propose, lequel peut dissimuler tant qu'il luy plaist, & toujours dire que l'on n'a pas encore trouvé ce qu'il demande.

Tant y a, que m'estant souvenu d'avoir autrefois remarqué, en traçant des Colonnes à la manière que Vignole enseigne pour les Ioniques & Corinthiennes, que la ligne de leur Contour estoit celle de Nicomedes : je dis à M. Bossé, qui me fit voir au mois de Janvier de la même année 1664. ces *Estrenes à tous les Architectes*, que bien que

DE LA DIMINUTION DES COLONNES.

3

que je n'eusse point l'art de deviner, & que je confessasse ingenuëment mon ignorance sur le sujet de ce *Paradoxe*, je voulois néanmoins proposer plus nettement un Probleme de la mesme nature à son Auteur, que je mis par manière de jeu sur le dos de son écrit, en ces termes. *Autre Probleme. Le moien de décrire tout d'un trait, & sans s'embarasser de plusieurs points trouvez dont on se sert pour les Cherches, la manière la plus élégante qui soit en usage parmy les Architectes modernes pour l'usage & diminution des Colonnes ? Et quelle en est la figure ?*

Quelques jours après le sieur Bossé m'ayant prié de luy vouloir expliquer ma pensée, je luy fis sur ce sujet la Lettre qui fait le discours suivant.

SECOND DISCOURS,

O U

LETTRE A M. BOSSE SVR LE MESME sujet de l'enflure & diminution des Colonnes, & de la description de la ligne qui fait le Contour des Ioniques, Corinthiennes, & Composées.

MONSIEUR, Je n'ay pas la science de deviner pour vous dire quels sont les sentimens de celuy dont vous me parlez sur le Probleme ou *Paradoxe*, comme il dit, qu'il a proposé pour *Estrenes à tous les Architectes* : Mais je puis bien vous entretenir de la solution de celuy que j'écrivis dernièrement au dos de son imprimé, dans laquelle je vous assûreray premièrement avec franchise que je n'ay aucune part, puis qu'il y a plus de deux mille ans qu'elle est trouvée, & que je ne puis tout au plus me glorifier d'autre chose, que de m'estre autrefois apperceû, en dessaignant des Colonnes diminuées à la manière élégante que Vignole dit avoir inventée pour les Ioniques & Corinthiennes, que *la Cherche courbe qui la décrit, est la ligne de Nicomedes, que l'on appelle la première Conchoïde des Anciens* ; & par le moyen de laquelle, au rapport d'Eutocius, ce Geometre prétendit avoir résolu ce fameux Probleme *de la Duplication du Cube commandée par l'Oracle*, & qui a tant exercé les esprits du siècle de Platon dans la recherche *de deux moyennes proportionnelles entre deux droites données*. C'est celle-là mesme que M. Viette a de nostre temps supposée comme une petition ou demande au supplement de Geometrie pour résoudre tous les Problemes solides, & dont les Equations vont au Cube ou au quarré quarré ; ne jugeant pas que sa description, par le moyen de l'instrument de Nicomedes, fust plus mechanique, ou pour mieux dire, moins Geometrique, que celle du Cercle par le moien du Compas, dont l'usage est néanmoins receû par ce principe de petition ou demande dans le premier des Elements d'Euclide. Et quoy que ces mesmes Equations se résolvent plus noblement dans les livres de M. Descartes, par la seule intersection du Cercle & de la Parabole, qui sont lignes d'un genre plus simple & moins composé que la Conchoïde ; celle-cy ne laisse pas d'avoir ses usages pour les solutions des Equations plus élevées ; & les suppositions de M. Viette sont tres-sçavantes & tres-veritables.

Mais pour retourner à nostre propos ; Quoy que vous sçachiez parfaitement cette invention élégante de Vignole, & que vous la puissiez voir dans son Livre, je ne laisseray pas de vous en tracer icy la figure avec son discours, selon la traduction de l'illustre M. le Muet, afin que vous puissiez mieux juger du raisonnement que je feray ensuite.

B

PREMIER PROBLEME

4

Figure I. de la I. Planche. Quant à cette autre façon, dit-il, je l'ay trouvée de moy-mesme; & quoy qu'elle soit moins connue, elle est néanmoins facile à concevoir par les lignes. Je diray donc qu'ayant résolu les mesures de la Colonne, c'est à dire, sa hauteur & grosseur, & la diminution qu'elle doit avoir au bout d'en haut, on doit tirer une ligne à l'infini en commençant par C, qui est au tiers du fust de la Colonne, & continuant par D; puis rapportant la mesure CD au point A, où finit la diminution du haut, jusqu'à ce qu'elle coupe la perpendiculaire au point B, & que AB soit continuée jusqu'en E. De là on pourra tirer tant de lignes qu'on voudra qui partiront de la perpendiculaire, & iront à la circonférence de la Colonne, sur lesquelles appliquant la mesure CD, on trouvera tant en haut qu'en bas l'enflure de la Colonne; & cette manière peut estre appliquée à l'Ionique, Corinthien & Composé.

Figure II. de la I. Planche. Où vous voyez, Monsieur, que toutes ces lignes qui, partant du point E, sont comprises entre la Perpendiculaire ou Axe de la Colonne & sa Circonférence, sont toutes égales entre elles, & à la droite CD. De sorte que si nous appellons le point E, le Pole; l'Axe de la Colonne, la Regle ou Canon; & la ligne CD, l'Intervalle: je ne voy plus rien qui m'empesche d'appeller la ligne courbe qui passe depuis A par toutes les extrémités recherchées, la première Conchoïde des Anciens, puis que c'est toute la mesme; & que vous connoistrez encore mieux par l'instrument que Nicomedes a inventé pour la décrire, dont la figure est la seconde de la première Planche; en laquelle, après avoir déterminé comme dessus la largeur de la Colonne, dont la moitié est CD, & trouvé la longueur de la ligne CE, il faut prendre trois regles de bois ou de métal GF, ID, HA, dont les deux GF, & ID, sont attachées ensemble à l'équerre où à angles droits comme en D; & par le milieu de la regle GF il faut entailler un petit canal à queue d'aronde qui s'étende en toute la longueur de la regle. Il s'en fait une autre de mesme dans le milieu de la regle HA, qui s'étende indéfiniment vers le bout H, mais qui vers l'autre bout se termine en K, en sorte néanmoins que la distance AK, ne soit pas plus grande que la distance CE. Ensuite il faut faire au bout de la regle HA vers le point A, la ligne AB égale à la ligne CD, & attacher par dessous la regle au point B vn bouton de bois ou de métal qui puisse couler juste dans le canal de la regle GF. Il en faut attacher vn autre semblable au point E, dans le milieu de la regle ID, qui coule juste dans le canal de la regle AH, afin que la regle GF estant appliquée à l'axe de la Colonne, en sorte que le point D réponde au renflement, & la regle AH se mouvant en avançant ou reculant sur le bouton E, comme sur vn pivot ou Pole, tandis que le bouton B se meut au long dudit axe, c'est à dire, au long du Canal de la regle GF; le point A décrive par ces deux mouvemens la ligne courbe Aa, Ca, pour le contour de la diminution & renflement de la Colonne qui est appelée *Conchoïde* par Vitruve, & dans laquelle ligne toutes les droites, comme ba, tirées du Pole, & comprises entre le Canal de la regle GF, c'est à dire, entre l'axe de la Colonne & sa Circonférence, sont toutes égales entr'elles, & à l'intervalle AB, ou CD. En quoy il paroist que la ligne courbe que cet instrument a décrite, est la mesme que celle que Vignole a prétendu décrire. Et si vos regles estant d'une grandeur indéfinie, vous faites en sorte que les boutons B & E puissent tellement s'avancer ou reculer au long des regles AH & DI, que les intervalles, comme AB & CE, puissent aussi estre pris sur lesdites regles de telle grandeur que l'on voudra; il est évident que cet instrument pourra servir à décrire les Courbes des Colonnes, de quelque hauteur ou grosseur qu'elles puissent estre, puisque toute leur différence ne consiste qu'en celle desdits intervalles. L'autre costé de la Colonne sera décrit en la mesme manière en changeant l'instrument de place, & le rapportant de l'autre part.

Ainsi, Monsieur, il me semble que mon Probleme est assez bien résolu par cet instrument; & que sans s'embarasser à rechercher ces points infinis, comme veut Vignole, par lesquels on puisse mener doucement cette cherche, qui de soy dans la rigueur est toujours imparfaite, on peut dorenavant tirer cette ligne tout d'un trait, uniformement & en sa perfection.

C'est

DE LA DIMINUTION DES COLONNES.

5

C'est de quoy j'ay voulu vous faire part, en attendant que nous ayons de l'Auteur du *Paradoxe* quelque chose de considérable sur cette matière, ainsi qu'il y a lieu de l'espérer par ses *Estrenes*. Vous assurant au reste que bien qu'il y ait raison d'estre surpris, que depuis tant de siècles qui ont produit de si grands Hommes pour l'Architecture, lesquels ont si bien tracé les diminutions & l'enflure des Colonnes, personne, au moins que je sçache, n'ait fait réflexion à cette manière de description que le seul Vignole, & que depuis luy tant de braves Architectes se soient heureusement servis de son invention, sans avoir rien dit de la nature de la Courbe qu'elle produit, ny du moyen de la dessigner tout d'un trait: Quoy qu'il y ait, dis-je, beaucoup de sujet de s'en étonner, je vous proteste néanmoins que je n'ai aucune vanité que cette pensée me soit venue, de laquelle je me glorifie moins que de l'honneur que vous me faites de m'aimer. Je suis, &c.

Ce 24. Janvier 1664.

TROISIEME DISCOURS SVR LA NATURE ET DESCRIPTION de la Ligne qui fait le Contour des Colonnes Doriques & Toscanes.

AYANT ainsi discouru sur les propriétés de la Ligne Courbe qui fait le Contour des Colonnes Ioniques, Corinthiennes & Composées, j'ay voulu considérer l'autre manière que Vignole décrit, & dont il se sert pour la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques. Et après avoir soigneusement medité sur la nature de la Ligne qu'elle produit; j'ay reconnu que c'estoit une Ligne de la même nature que celle que décriroit une fleche, ou toute autre chose tirée & jetée horizontalement, dans l'opinion de ceux qui croient qu'un poids tombant de la surface de la terre se trouveroit justement au bout de six heures au Centre (si la terre se mouvoit du mouvement journalier,) & passant outre par la force qu'il auroit acquise en sa chute, il arriveroit au bout d'autres six heures à la surface des Antipodes, si le chemin luy estoit ouvert: D'où descendant & repassant en six heures une autre fois par le Centre, il se trouveroit au bout d'un jour préfix au même lieu d'où il estoit premièrement parti, si l'air, ou les autres empeschemens du dehors ne l'arrestoient.

Je dis donc qu'un trait poussé vigoureusement, & parallele à l'horizon décriroit en son passage une Ligne de la même nature de celle dont on se sert pour la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques, si cette opinion estoit véritable: parce qu'estant porté d'un mouvement de Lation égale & uniforme, qui luy est imprimé par l'impulsion, & qui fait que les distances qu'il parcourt sont entre elles en même proportion que les temps qu'il emploie à les parcourir, (c'est à dire, comme les Arcs de l'Equateur qui passent cependant sous le Meridien,) & d'un autre mouvement inégal, & qui s'augmente continuellement, que son propre poids luy inspire, & qui dans l'opinion susdite se fait sur la proportion des Sinus versés des mêmes Arcs de l'Equateur; il paroist que la Ligne, que ce trait décriroit en son passage, seroit composée de ces deux mouvemens, dont l'un est égal, uniforme, & répondant aux Arcs de l'Equateur; l'autre inégal, continuellement précipité, & répondant aux Sinus versés des mêmes Arcs.

Mais la Ligne du Contour des Colonnes Toscanes & Doriques se fait par la composition de deux mouvemens pareils, ainsi que je le démontrerai cy-dessous; & partant la Ligne que décrivent les corps jettez horizontalement, comme un trait

ou une flèche dans l'opinion susdite, est à peu près la même que celle dont on se sert pour la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques.

Fig. III. de la I. Planche. Pour la démonstration de ce que je viens de dire, il ne faut que se souvenir de la pratique ordinaire des Ouvriers pour la description de cette Ligne, qui se fait en cette manière. La Ligne AC, soit l'Axe d'une Colonne à diminuer, & les deux tiers de sa longueur, si on veut que la diminution commence au tiers; ou la moitié, si on desire qu'elle commence dans le milieu de la Colonne: La Ligne AB, soit le module ou la moitié de sa grosseur, sur laquelle comme rayon soit fait le Cercle BSTVZ. Ensuite il faut prendre la partie AG, pour le demidiametre de la Colonne par le haut, en sorte que BG soit sa plus grande diminution, & tirer la Ligne GE parallele à AC, qui coupera le Cercle en F, la portion duquel BF, doit estre partagée en autant de parties égales qu'on voudra, comme aux points STV, aussi bien que l'Axe AC, aux points HKM, en sorte que la ligne AC contienne autant de parties égales que l'Arc BF. Enfin des points des divisions de l'Axe il faut élever des Perpendiculaires, comme HI, KL, MN, qui soient rencontrées aux points O, X & Y, par d'autres lignes paralleles à l'Axe, & tirées des points de l'Arc BF, de telle manière qu'elles se répondent reciproquement l'une à l'autre, c'est à dire, que celle qui part du premier point de l'Axe H, comme HOI, soit rencontrée en O, par celle qui vient du premier point de l'Arc S, comme PSO, & celle qui part du second point de l'Arc T, comme QTX, se termine en X, sur celle qui vient du second point de l'Axe K, comme KXL, & ainsi des autres. Et passant par tous les points BOXYE une ligne adoucie, elle fera celle que l'on cherche pour la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques.

Et si nous appellons le point B, le *sommet* de cette ligne Courbe, la ligne AB, l'*Axe* ou le *Diametre*, les lignes PO, QX, RY, GE, &c. les *ordonnées*; on verra que l'ordonnée QX, contenant autant de parties de la ligne AC, ou de son égale GE, que l'arc BT en contient de celles de l'arc BF, l'ordonnée QX, est à l'ordonnée GE, comme l'Arc BT, est à l'Arc BF; & la même chose se pouvant dire de toutes les autres, il paroîtra que les ordonnées seront entre elles comme les Arcs qui sont compris entre le sommet & lesdites ordonnées: & partant que cette ligne Courbe est une espece de *Spirale* ou *Ovale*.

De plus, si nous prenons le rayon AB, pour Sinus total, les portions de l'Axe BP, BQ, BR, BG, &c. seront les Sinus versés des Arcs, BS, BT, BV, BF, &c. & par conséquent nous pourrons appeller cette Courbe une *ligne Spirale* ou *Elliptique*, dans laquelle les portions de l'Axe sont les Sinus versés des Arcs, qui sont entre eux comme les ordonnées.

Maintenant si nous faisons une autre hypothese, & si nous prenons le point A, pour le centre de la terre, la ligne BA, pour le demidiametre, & l'arc BVF, pour une portion de l'Equateur: Il est constant que dans la pensée de ceux, qui, ainsi que nous avons dit cy-dessus, croient qu'un poids tombant librement de la surface de la terre parcourroit les espaces de son Diametre, en la même raison que sont les Sinus versés des Arcs de l'Equateur, qui passeroient cependant sous le Meridien; ce même poids (supposé que la terre se meut du mouvement journalier) arriveroit nécessairement au centre, quand le quart de l'Equateur auroit passé depuis le moment de sa chute, je veux dire, au bout de six heures. C'est à dire, que le poids tombant du point B, arriveroit au point P, lors que le premier Arc de l'Equateur BS, auroit coulé, & qu'il parcourroit la ligne BQ, en autant de temps qu'il faudroit à l'arc BT, pour passer sous le Meridien; & la ligne BG en autant de temps qu'il en faudroit à l'Arc BF; & enfin la ligne BA, c'est à dire, tout le demidiametre, en autant de temps que l'Arc BZ, c'est à dire, le quart de Cercle de l'Equateur. Et comme le quart de Cercle de l'Equateur passe précisément en six heures, il se voit qu'en cette opinion le poids tombant du point B, & passant par les portions du demidiametre

mettre B A , dans les mêmes temps qu'il faudroit pour passer les Arcs de l'Equateur dont lesdites portions sont les Sinus versés ; ce même poids (supposé le mouvement journalier de la terre) arriveroit au bout de six heures précises au centre : d'où remontant en proportion contraire à sa cheûte, & par la même raison des Sinus versés, il arriveroit au bout d'autres six heures à la surface de la terre opposée, de laquelle il retomberoit une autre fois en même espace de temps jusqu'au centre ; & enfin il retourneroit au bout de vingt-quatre heures précises au point B, d'où il estoit premièrement parti.

Supposé donc que ce soit là le genie & la nature des choses pesantes ; si nous prenons la ligne BD pour l'espace, qu'une fleche tirée horizontalement du point B doit parcourir dans le temps que l'Arc BF de l'Equateur ou son Parellele aura passé sous le Meridien, il est constant que la fleche sera cependant descendue par son propre poids de toute la longueur de la ligne BG, qui est le Sinus versé du même Arc BF. Et si nous divisons le susdit Arc BF en parties égales comme aux points ST V, & la ligne BD, ou son égale AC, en autant d'autres, aux points IL N ou HK M, ainsi qu'il s'est dit ; il se verra que le mouvement de Lation, qui a été communiqué à la fleche par l'impulsion, selon la ligne BD, étant uniforme, la fleche aura couru l'espace BI dans le même temps que l'Arc BS aura passé : & comme cependant elle sera descendue par son poids de la longueur de la ligne BP ou IO, la fleche se trouvera alors au point O, où les deux lignes, de Lation uniforme BI, ou PO, & de cheûte BP ou IO, se rencontrent. Tout de même elle sera en X quand l'Arc BT aura passé, parce que c'est en ce point où se trouvent la ligne de Lation égale BL ou QX, & celle de la cheûte BQ ou LX, qui se font l'une & l'autre dans le même temps du passage de l'Arc BT. Et la même chose se pouvant dire de tous les points de la courbe BOXYE ; il est évident que c'est celle que décriroit une fleche en l'hypotese susdite ; & que par conséquent cette ligne est la même que celle qui est décrite pour la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques : ce qu'il falloit démontrer.

Que si l'on desire en décrire la figure tout d'un trait, & sans estre obligé de se servir de plusieurs points trouvez, on peut faire un instrument assez commode pour cet effet, qui doit estre composé d'un Secteur de Cercle, d'une rouë avec son pignon, d'une regle endentée & d'une autre regle, (comme en la quatrième Figure de la première Planche) où le Secteur ABF est le même que celui de la troisième Figure de la première Planche que nous avons expliquée ; c'est à dire, que les lignes AB & AF de la quatrième Figure sont égales au module, & l'Arc BF à celui qui est compris entre les deux lignes BD & GE de la troisième Figure, qui font l'intervalle de la plus grande diminution de la Colonne. Cét Arc BF dans ladite quatrième Figure doit estre entrecoupé de dents, qui s'enchassant dans les dents du pignon C, le fassent mouvoir, & donner le tour à la rouë LIK, qui dans la circonference a d'autres dents égales & entrelacées avec celles de la regle GH, afin que par le mouvement circulaire de la rouë, la regle GH se puisse également avancer en ligne droite. Enfin il faut prendre une autre regle comme ES qui soit égale & parallele à la première GH, & tellement attachée à ses extrémités E & S, qu'elle se meuve en avançant avec elle, & conservant son parallelisme, en sorte toutefois que rien ne l'empêche cependant de s'approcher vers le point A, & de suivre l'attraction continuelle qui est faite par une autre petite regle comme BD, qui étant attachée à un pivot sur lequel elle puisse tourner au bout de l'Arc en B, embrassée de son autre extrémité D ladite regle ES, & la contraigne de suivre la descente de l'Arc, sans embarasser cependant le mouvement droit & en avant qui luy est communiqué par la regle GH.

Il paroît par cette construction que si le diametre de la rouë LIK est au diametre du pignon C, comme la ligne IH, c'est à dire, les deux tiers de la Colonne, est à la longueur de l'Arc BPF ; & si les dents du pignon sont égales à celles du susdit Arc, & celles de la rouë LIK à celles de la regle GH ; il s'ensuivra que la regle endentée GH s'avancera uniformement depuis I jusqu'en H dans les mêmes intervalles de

*Instrument
pour décrire
le trait de la
diminution
des Colonnes
Toscanes &
Doriques.*

*Fig. IV.
de la I.
Planche.*

temps que l'Arc BF passera aussi uniformement sous le pignon C depuis F jusqu'en B; de telle sorte que le bout de la regle H se trouvera précisément en R, lors que le point B se trouvera en P, & qu'il y aura même proportion de toute la ligne IH à la partie IR, que de tout l'Arc BF à la partie BP, & ainsi des autres.

Il s'ensuivra de plus, que tandis que la ligne ES sera portée uniformement en avant vers H par le mouvement de Lation égale de la regle GH, elle sera encore portée d'un autre mouvement vers le point A, qui luy sera communiqué par l'attraction continuelle de la regle BD, laquelle étant attachée au point B, fera que la ligne ES descendra selon la proportion des Sinus versés des portions de l'Arc BF; c'est à dire, que lors que la partie de l'Arc BF aura passé depuis le point F jusqu'en P, & que cependant la ligne ES aura coulé par le mouvement de la regle GH depuis I jusqu'en R; la même ES sera aussi descendue de toute la distance RQ ou FN, qui est le Sinus versé de l'Arc FP, en telle sorte qu'elle se trouve alors au point Q. Et lors que l'Arc entier BF aura passé depuis F jusqu'en B, & que cependant la ligne ES aura coulé jusqu'en H, elle sera aussi descendue de toute la ligne HS ou FM, qui est le Sinus versé dudit arc FB, & en cette manière elle se trouvera au point S, après avoir décrit, en son passage composé des mouvemens des deux regles GH & BD, la ligne Courbe IQS, qui est celle que l'on cherche.

Cette description est la même que celle de Vignole, qui fait ses Colonnes Toscanes & Doriques également grosses depuis la base jusqu'au tiers de leur hauteur, où il commence leur diminution, & la continue jusques sous le chapiteau. Mais si on vouloit que la diminution commençant au susdit tiers se fît aussi uniformement de part & d'autre, & aussi bien vers la base que vers le chapiteau; il ne faudroit qu'ajouter au Secteur ABF, une autre Secteur ABT égal à la moitié dudit Arc ABF; afin que passant sous le pignon C de la part de K, & donnant un mouvement contraire au haut de la rouë LIK, la regle IG fût poussée également vers le point X, où elle arriveroit lors que le susdit Arc BT auroit passé sous le pignon, & que cependant la regle ES, ou plutôt OV, seroit descendue depuis F jusqu'en N, c'est à dire, depuis X jusqu'en V, où elle se trouveroit, après avoir décrit en son passage la ligne Courbe IV, qui est la même que la ligne IQS continuée de la part de V. Et ainsi l'on auroit toute la ligne VIQS pour le Contour d'un côté de la Colonne, lequel pourra estre transféré de l'autre part, si on veut avoir son entière description.

Et quoy que cette manière paroisse défectueuse, en ce qu'elle semble ne pouvoir estre propre que pour la délinéation de la diminution d'une Colonne dont la longueur & grosseur seroit déterminée, & qu'il faudroit autant d'instrumens differens, qu'il y peut avoir de differentes mesures de Colonnes, c'est à dire, infinies; il s'y peut néanmoins trouver un remede assez facile, & donner à cette Machine la même universalité pour les Colonnes Toscanes & Doriques, que nous l'avons attribuée au discours cy-dessus, à celle de Nicomedes pour les Ioniques, Corinthiennes & Composées.

Il ne faut que faire la regle endentée & le Secteur d'une grandeur indéfinie, & marquer ses dents en forme de rayons partans du Centre, & remplir les espaces qu'ils font entre eux en s'écartant, en sorte qu'ils soient toujours égaux aux intervalles des dents du pignon, afin que sur la longueur du Rayon qui passe par le point B, on puisse hausser ou baisser le pivot, sur lequel tourne la regle BD selon la mesure du module donné de quelque Colonne que l'on propose.

QUATRIEME DISCOURS.

APPLICATION DES SECTIONS

Coniques au Trait de la diminution des Colonnes.

J'AUROIS terminé ces raisonnemens sur lesquels il semble que je me suis suffisamment estendu, si le discours précédent ne m'avoit fait faire une nouvelle réflexion sur le même sujet, qui est que tout ainsi que sur l'opinion de quelques-uns touchant la nature du mouvement d'un poids qui tombe, nous avons démontré que les corps jettez horizontalement décrivoient une ligne à-peu-près pareille à celle dont on se sert pour le trait de la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques; il me semble que ces mêmes corps jettez décrivant une autre espece de ligne dans l'opinion que quelques-autres ont eüe du même mouvement, on peut présumer que cette ligne pourroit estre de quelque utilité pour la délinéation des mêmes Colonnes.

Et comme l'une & l'autre de ces deux opinions est fondée sur des raisons également probables, & marchent sur des proportions si prochaines, qu'il est presque impossible que l'esprit humain les puisse discerner l'une de l'autre par l'expérience, ou les convaincre de faux dans les hauteurs qui sont à nostre connoissance; il y a aussi grande apparence que les lignes des corps jettez, que nous pouvons appeller *lignes de Projection*, tirant leur origine de principes si semblables & si proches, ne doivent pas aussi estre fort différentes, ou d'une nature ou figure extrêmement éloignée l'une de l'autre.

Tant y a que les mêmes espaces qui dans l'opinion cy-dessus expliquée estoient parcourus par un poids qui tombe en certains intervalles de temps égaux, selon la fuite des Sinus versés des Arcs égaux de l'Equateur; les mêmes intervalles, dis-je, sont passés dans une autre opinion en mêmes temps selon la fuite des nombres impairs, en sorte que si dans le premier moment de sa cheûte il parcourt 1 de ces espaces, il en passera 3 dans le second, 5 dans le troisième, 7 dans le quatrième, 9 dans le cinquième, 11 dans le sixième, & ainsi à l'infini.

Et parce que dans le premier temps il a passé 1 espace, & 3 espaces dans le second temps, il aura parcouru 4 espaces dans le premier & second temps ensemble, c'est à dire, en 2 temps; & 1, 3, & 5 espaces, c'est à dire, 9 dans le premier, second & troisième, cest à dire, en 3 temps; & 1, 3, 5 & 7, c'est à dire, 16 espaces dans le premier, second, troisième & quatrième, c'est à dire, en 4 temps, & ainsi des autres. Où il se voit que comme le nombre 4 des seconds espaces est le Quarré de 2 qui est le nombre des seconds temps, & 9 qui est le nombre des troisièmes espaces est le Quarré de 3 nombre des troisièmes temps, & 16 nombre des quatrièmes espaces est le Quarré de 4 nombre des quatrièmes temps, & ainsi des autres; c'est à dire en un mot, que parce que les nombres impairs ajoustez consecutivement l'un à l'autre produisent la fuite des premiers Quarrez; il s'ensuit par conséquent que les nombres des espaces sont entre eux comme les Quarrez des nombres des temps, & que la raison de ceux-là est double de celle de ceux-cy.

La vraisemblance de ces deux opinions se connoist aussi par la proximité des nombres des espaces qui se parcourent en l'une & en l'autre dans les mêmes temps, qui est telle, que si au premier moment il se fait un espace, au second il s'en fera 3 dans une opinion, & environ 3 moins $\frac{1}{11}$ dans l'autre, au troisième il s'en passera 5 dans l'une, & 5 moins $\frac{1}{7}$ dans l'autre, au quatrième 7 dans l'une, & 7 moins $\frac{1}{4}$ dans l'autre, au cinquième 9 dans l'une, & 9 moins $\frac{1}{3}$ dans l'autre; & ainsi consecutivement à l'infini. Où il paroist que ces differences sont si petites, & si peu remarquables dans les

hauteurs où nous pouvons faire les expériences, qu'il est absolument impossible d'asseûrer avec certitude de la verité ou fausseté de l'une ou l'autre de ces deux opinions.

Galil. de
motu.

Galil. 2. de
Sistém. cosm.

Ce que Galilée a si bien reconnu, que bien qu'il soit l'Auteur de l'opinion qui soutient que les espaces suivent la progression des nombres impairs, & que sur ce principe il ait composé un Livre entier du mouvement rempli d'un grand nombre de propositions ingenieuses; il a néanmoins trouvé l'autre opinion si belle, qu'il n'a pû s'empêcher de la produire comme si elle venoit de luy dans le deuxième de ses Dialogues du Sistème du Monde, & d'en parler d'une manière à faire croire que ce fut son véritable sentiment. Il y explique même quelques propriétés de ce mouvement sur ce principe, lesquelles sont tout-à-fait admirables; & celle-cy entre autres, que supposé le mouvement de la Terre, la ligne qu'un poids tombant de sa surface au Centre décrirait par sa cheûte, seroit Circulaire, & égale à celle qu'il désigneroit, s'il ne parloit pas de ladite surface.

Sur quoy je dirai en passant, que pour faire en sorte que cette proposition soit véritable, il faut non seulement supposer que la Terre se meut, mais même qu'elle ne se meut que de son mouvement journalier, c'est à dire, sur son propre centre; parce que si l'on y veut ajouter l'annuel, ces lignes cesseront d'être Circulaires, & deviendront plutôt des especes de Cycloïdes ou Roulettes, ou même des Spirales, aussi bien celle que décrit un Poids qui tombe, que celle qui est faite par le point de la surface de la Terre, duquel il est parti pour tomber. Et c'est peut-être la raison qui fait dire sur la fin de son discours sur ce sujet à Galilée, que n'osant pas asseûrer que ce soit-là la nature des corps qui tombent, il peut au moins avancer cette proposition, que si la ligne de leur cheûte n'est pas cette Circulaire, c'en est une autre qui luy ressemble, & qui ne s'en éloigne que de fort peu.

P. Greg. à
S. Vincen-
tio.

Mais pour retourner à nostre propos, le même Galilée ayant démontré que sur l'hypothèse de la cheûte des poids en proportion des nombres impairs, la ligne de Projection est Parabolique, qui dans l'autre hypothèse estoit Spirale; & comme la Parabole & la Spirale ont d'ailleurs un si grand nombre de propriétés communes, qu'elles ont fait dire à un grand Geometre de nostre temps, que *la Parabole n'estoit qu'une Spirale développée*; il y a grande apparence que l'effet de l'une en la diminution des Colonnes pourroit aussi être heureusement produit par l'autre.

I.

Pour la Parabole.

C'EST ce qui m'a fait résoudre à expliquer presentement une manière assez facile de décrire & d'appliquer la ligne Parabolique aux Colonnes, afin que l'on en puisse faire l'expérience, & la mettre désormais en usage, si elle satisfait aux yeux de ceux qui s'y connoissent.

Figure I.
de la II.
Planche.

Pour l'appliquer il y faut proceder en cette façon. La ligne AB soit la longueur de toute la Colonne, CD le demidiametre de sa plus grande grosseur, CG ou BF le demidiametre de sa moindre grosseur sous le Collet ou Gorgerin, AC le tiers de la Colonne, ou telle autre partie où on voudra que la diminution commence. Après quoy la ligne CD doit être continuée en N, en sorte que DN soit égale à DG ou EF; & sur la ligne CN, comme diametre on décrit le demicercle NOC, qui coupe la ligne DE en O, & l'on fait DH égale à DO, laquelle fera par conséquent moyenne proportionnelle entre CD & DG; puis il faut mener HI parallele à AB, qui soit coupée en I par la ligne DI, tirée du point D par le point F, & l'on fait les lignes CK & CM égales à HI. Enfin du point D comme sommet, sur l'axe DC & sur l'amplitude MK, on décrit la ligne Parabolique MLDFK laquelle passera nécessairement par le point F, & laissera de part & d'autre la ligne, LDF pour la diminution que l'on demande.

La

DE LA DIMINUTION DES COLONNES.

II

La démonstration en est aisée, parce que la ligne HD étant moyenne proportionnelle entre les deux CD & DG, il s'enfuit que le quarré de HD sera au quarré de DG, comme la ligne CD est à la ligne DG; mais le quarré de DH est au quarré de GD, comme le quarré de HI ou CK est au quarré de GF; donc le quarré de l'ordonnée CK sera au quarré de l'ordonnée GF, comme la portion de l'axe CD est à la portion GD. Et partant le point F sera dans la Parabole dont l'axe sera CD, le sommet D, & l'ordonnée CK, c'est à dire, l'amplitude MK.

Je ne grossirai point ce discours de toutes les différentes manières dont on se sert pour décrire les Paraboles, soit par le moyen de plusieurs points trouvez, ou tout d'un trait, par des instrumens qui se trouvent aisément dans les Livres. J'avertirai seulement les Ouvriers que Galilée leur en enseigne une dans ses Méchaniques, que j'estime facile & ingénieuse, & que j'ay fait heureusement pratiquer par les Charpentiers du Roy, en la fabrique des Vaisseaux & Galères, pour ce qu'ils appellent leur donner beau Galbe à la Poupe.

Elle est telle, qu'il ne faut que faire la description cy-dessus, au plan d'un mur qui soit à plomb, en sorte que la ligne MK soit de niveau, & attacher deux clous aux deux repaires K & M qui terminent l'amplitude de la Parabole, sur lesquels il faut laisser librement pendre une ficelle ou chaînette, jusqu'à ce que de son milieu elle vienne à toucher le point D, c'est à dire, le sommet de la Parabole, afin qu'elle la marque dans toute son étendue; en sorte que si cette cordelette est frottée de crayon ou sanguine, & qu'on la fasse toucher doucement au mur sans la changer de situation ny la varier, la ligne Parabolique se trouve désignée sur le plan du mur, laquelle passera nécessairement par le point F.

II.

Pour l'Ellipse.

QUE si l'on veut éprouver quel effet peut faire la ligne Elliptique, il faut (dans la 2. Figure de la 2. Planche) décrire un demicercle sur tout le diamètre de la plus grande grosseur de la Colonne KD, lequel coupe GF en H, & abaisser la ligne HI parallèle à DK; puis tirer la ligne ID, à laquelle du point B il faut mener une parallèle BO qui rencontre la ligne KD continuée en O, & faire les quatre lignes CN & CM, DP & DQ égales à la ligne CO; & par ce moyen l'on aura les deux Axes de l'Ellipse MN & KD, laquelle passera nécessairement par le point F; & les deux points Q & P en seront les foyers, qui sont appelez Singliots par les Ouvriers, & par le moyen desquels l'Ellipse ou ovale peut estre facilement décrite.

Fig. II.
de la II.
Planche.

La démonstration en est telle, parce que BO est parallèle à ID; la ligne CO sera à CB, c'est à dire, CN à GF, comme CD est à CI ou GH; & le quarré de l'ordonnée CN au quarré de l'ordonnée GF, comme le quarré de CD est au quarré de GH, c'est à dire, comme le rectangle KCD est au rectangle KGD; & partant le point F sera dans l'Ellipse dont MN & DK seront les Axes. Le reste au sujet des foyers Q & P, se voit clairement par la 52. du 3. des Coniques d'Apollonius.

III.

Pour le Cercle.

PEUT-ESTRE que la ligne Circulaire mesme tombera dans le goust de quelques-uns. Elle se peut appliquer en cette manière. Il faut (dans la 3. Figure de la 2. Planche) mener la ligne droite DF, sur laquelle au point H, où elle est partagée en deux également, il faut tirer une perpendiculaire HI, laquelle rencontre la ligne DC continuée en I, où sera le centre du Cercle, qui ayant ID pour rayon, passera aussi par le point F.

Fig. III.
de la II.
Planche.

F

Mais comme ce centre I peut se trouver tellement éloigné, que la pratique de la description du Cercle en deviendroit difficile, ou même impossible; l'on peut se servir de deux regles, comme DO & DN de grandeur indéterminée, & attachées en D, en sorte qu'elles contiennent l'angle FDM; & mettant deux repaires fermes aux deux points F & M, que je suppose également distans du point G; il faut faire marcher le sommet de l'angle D depuis L jusqu'en F, en sorte que la regle DN touche toujours le point M, & la regle DO le point F; & par ce moyen le point D décrira par son passage la ligne Circulaire L D F que l'on demande.

I V.

Pour l'Hyperbole.

*Fig. IV.
de la II.
Planche.*

ET si l'on veut sçavoir si l'Hyperbole y est utile, il faut (dans la 4. Figure de la 2. Planche) continuer indéfiniment la ligne CD, & prendre les deux DI & IK égales à DC, en sorte que DK soit égale au plus grand diametre de la Colonne; puis sur les deux lignes DK & GI comme diametres, il faut décrire deux demicercles s'entrecoupans au point H, & du point G tirer la ligne GH, & la continuer en R, en sorte que GR soit égale à GF; puis du point R, il faut mener RL parallèle à HI, c'est à dire, perpendiculaire à GR, & qui rencontre la ligne GK continuée en L. Ensuite on prend la ligne DM égale à RL, & ayant tiré la ligne IM, on fait de part & d'autre du point I sur la ligne CK continuée, les lignes IO & IP égales à IM. Et par ce moyen sont trouvez les foyers ou Singliots O & P de l'Hyperbole, dont l'Axe transverse est DK, son Axe conjugué TS double de la ligne DM, le centre I, le sommet D, où elle touchera la ligne DE, & passera par le point F.

Voicy comme je le démontre, parce que l'angle IHG est droit dans le demicercle IHG, & la ligne HI demidiametre du Cercle DHK; la ligne GH touchera le susdit cercle au point H, & partant le rectangle KGD sera égal au carré GH, & le rectangle KGD sera au carré de l'ordonnée GF, comme le carré GH au même carré GF, ou de son égale GR, c'est à dire, comme le carré HI, ou de son égale DI, au carré RL, ou de son égale IS; c'est à dire, en prenant leurs quadruples, comme le carré du diametre KD au carré du diametre TS. Et partant le point F sera dans l'Hyperbole, dont les deux Axes seront DK & TS, le centre I, & le sommet D. Maintenant parce que DM est égale à IS, le carré IM ou IO sera égal aux carrés ID & IS; mais le carré IO est aussi égal au carré ID, & au rectangle KOD; donc le rectangle KOD est égal au carré IS, c'est à dire, au quart de la Figure, & excédant d'un carré, dont le costé est la ligne DO; & par conséquent le point O & le point P qui est également distant du centre I, seront les foyers de l'Hyperbole susdite: ce qu'il falloit démontrer.

*Instrument
pour la dé-
limitation de
l'Hyperbole.*

Il y a mille moyens de décrire les Hyperboles, quand on a trouvé ses Axes & ses foyers; & le plus aisé pour les Ouvriers est celui de M. des Cartes qui se pratique ainsi. On prend une grande regle, comme PQ, que l'on attache par un bout au Singliot P, sur lequel elle tourne, & par l'autre bout Q à une ficelle QFO, qui doit estre plus courte que la regle de toute la longueur de la ligne DK; l'autre extrémité de la corde s'attache à l'autre Singliot O.

Cela fait, il faut tenir la ficelle tout près de la regle, comme si elle y estoit collée, ainsi qu'il se voit dans la Figure, depuis Q jusqu'en F, ou depuis V jusqu'en X; & en tournant la regle sur le pivot P, & tenant toujours la corde joignant la regle, le point où elles se joindront décrira par ce mouvement l'Hyperbole FXD que l'on demande, laquelle pourra estre continuée de l'autre costé, en changeant la regle de face.

CINQUIÈME DISCOURS.

DETERMINATION DES MANIERES
*infinies d'appliquer les Sections Coniques au Trait de
 la diminution des Colonnes.*

IL faut icy remarquer que bien que je n'aye parlé cy-dessus que d'une seule manière d'Ellipse & d'Hyperbole, sçavoir de celle où l'Axe transverse de l'une & de l'autre est égal au plus grand diamètre de la Colonne ; il y a pourtant un nombre infini d'autres espèces de l'une & de l'autre qui peuvent estre décrites, & servir utilement à la diminution des Colonnes, & de sorte qu'elles touchent la ligne DE en D, & passent par le point F. Ce que j'explique en cette manière.

Aux deux lignes DG & GF (dans la 5. Figure de la 2. Planche) soit faite une troisième proportionnelle GH ; & du point H soient menées des lignes de tous costez, comme HD, HL, H λ , HM, &c. lesquelles coupent la ligne DE continuée en D, Q, P, I, O, &c. en sorte qu'elles rencontrent diversement la ligne DG continuée indéfiniment : C'est à sçavoir que HD la coupe au point D, HL au dessus du susdit point D, H λ luy soit parallèle, HM la coupe en M au dessous du point G, & HN en N, en sorte que GN soit égale à GD, & enfin H λ au point λ , en sorte que G λ soit moindre GD ; ensuite de tous les points de la ligne GD, compris entre G & D, soient entendues estre menées des lignes parallèles à GH, & qui soient moyennes proportionnelles entre les portions de la susdite ligne GD, comprises respectivement entre le sommet D & lesdites parallèles, & les portions desdites parallèles contenues entre ladite DG & les lignes tirées du point H. Ces choses ainsi supposées.

Je dis que toutes ces moyennes proportionnelles seront les ordonnées des lignes régulières, dont l'Axe sera GD, le sommet D, où la plupart touchera la ligne DE, & passeront par le point F, suivant cet ordre.

I.

LES moyennes proportionnelles entre les parties de l'Axe DG, & les portions des parallèles coupées par la ligne HD, comme AZ moyenne entre AD & AS, seront les ordonnées à une ligne droite DZ F.

I I.

LES moyennes proportionnelles entre les parties de GD, & les parallèles coupées par la ligne HL comme AT moyenne entre AD, & AB, seront dans l'Hyperbole DTF, dont DL sera l'Axe transverse, & DQ le droit. Où il paroist que ce sera l'Hyperbole que nous avons décrit cy-dessus, si la ligne DL est égale au plus grand diamètre de la Colonne, & GF égale aux deux tiers de sa longueur.

I I I.

LES moyennes proportionnelles entre les parties de GD, & les parallèles coupées par la ligne H λ , comme AV moyenne entre AD & AC, seront les ordonnées à la Parabole DVF, qui est celle que nous avons expliquée cy-dessus, & dont GD sera l'Axe, & GH ou DP le diamètre droit ou contigu.

I V.

LES moyennes proportionnelles entre les parties de GD, & les parallèles coupées par la ligne HM, comme AX moyenne entre AD & AK, seront les ordonnées à une

G

EBA

Ellipse $\mathcal{D}XF$, dont l'Axe transverse est DM , & son droit ou contigu est DI . Où il se voit qu'elles seront au cercle que nous avons décrit au précédent discours, si les lignes GH & MG sont égales, & qu'elles seront dans l'Ellipse que nous avons expliquée au même endroit, si la ligne DM est égale au plus grand diametre de la Colonne.

V.

LES moyennes proportionnelles entre les parties de GD & les paralleles coupées par la ligne HN , comme AY moyenne entre AD & AR *sont aussi dans une Ellipse* $\mathcal{D}YF$, dont l'Axe transverse est DN , & le droit DO . Où il faut remarquer que GN ayant été faite égale à GD dans cette hypothese, la ligne GF fera la moitié de l'Axe de même conjugaison avec DN , & partant cette Ellipse est la dernière de celles qui peuvent servir aux Colonnes, parce que toutes les autres, dont les Axes transverses sont moindres que DN , ont quelques ordonnées au susdit Axe & au dessus du point G qui sont plus longues que GF , & qui sont par conséquent passer la courbe de l'Ellipse au-de-là de la ligne EF , comme il se voit en l'hypothese qui suit.

VI.

LES moyennes proportionnelles entre les parties de GD , & les paralleles coupées par la ligne $H\lambda$, comme $A\rho$ moyenne entre AD & $A\mu$, *sont ordonnées à une Ellipse* $\mathcal{D}\rho F$, dont l'Axe transverse est $D\lambda$, & le droit $D\nu$; où il se voit que si le point A est plus près du point milieu de la ligne $D\lambda$ que le point G , la ligne $A\rho$ sera plus longue que GF ; & par conséquent le point ρ de l'Ellipse passera au-de-là de la ligne EF en ρ , d'où elle retournera en F , après avoir fait une Courbûre en dehors: ce qui ne peut pas servir aux Colonnes.

VII.

ENFIN, si la ligne du point H coupe DG entre D & G comme en π ; il arrivera 1. Que toutes les moyennes proportionnelles entre les parties de πD & les paralleles tirées entre les points π & D , & coupées par la ligne $H\pi$ continuée en τ , comme $A\beta$ moyenne entre AD & $A\xi$, *seront ordonnées à un Cercle* $D\beta\pi$ si les lignes πD , τD sont égales, ou à une Ellipse, si elles sont inégales, dont l'Axe transverse sera πD & le droit τD .

2. Et toutes les moyennes entre les parties de GD & les paralleles tirées de tous les points de la ligne $G\pi$, & coupées par la ligne $H\pi$, comme $\psi\chi$ moyenne entre ψD & $\psi\phi$, *seront ordonnées à une Hyperbole* $\pi\chi F$, qui touchera la susdite Ellipse au point π , & aura mêmes Axes qu'elle, savoir πD pour transverse, & $D\tau$ pour droit.

En quoy il se voit encore que ny l'une ny l'autre de ces deux lignes ne peuvent avoir aucune utilité pour les Colonnes, parce que l'Ellipse ne passe point par F , & l'hyperbole ne touche point la ligne DE en D , qui sont conditions nécessaires pour lesdites Colonnes.

Maintenant, comme on peut tirer une infinité de lignes du point H entre les deux lignes HG & $H\lambda$ qui couperont la ligne GD en quelque point au dessus de D , lequel terminera l'Axe transverse d'une Hyperbole utile aux Colonnes; & comme on peut tirer une autre infinité de lignes du même point H , qui couperont la même GD au dessous du point N en quelque point qui terminera l'Axe transverse d'une Ellipse aussi utile aux Colonnes.

De plus, comme les unes & les autres desdites lignes sont régulières, uniformes, & qui se peuvent décrire par une infinité de manières différentes, aussi-bien que par celles que nous avons cy-dessus expliquées, & qui (à la réserve de celles dont les Axes transverses sont coupez par les lignes tirées du point H entre les points D & N) touchent toutes la ligne DE en D , & passent par le point F .

Il s'ensuit que l'on peut utilement décrire une infinité de ces lignes pour le trait de la diminution des Colonnes, entre lesquelles la Parabole sera la moyenne, sous laquelle passeront

DE LA DIMINUTION DES COLONNES. 15

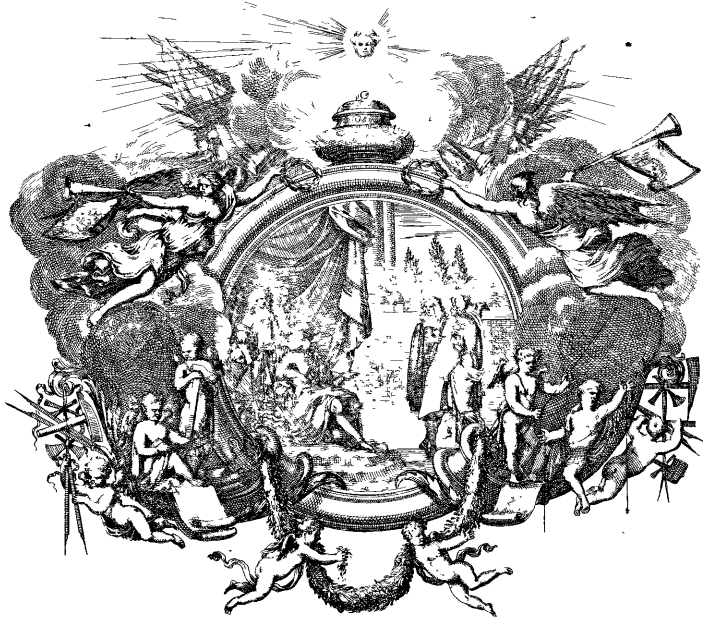
passeront les Hyperboles dans l'espace contenu entre la Parabole & la ligne droite DF, & toutes les Ellipses passeront au dessus, c'est à dire, dans l'espace compris entre la Parabole & la droite DE.

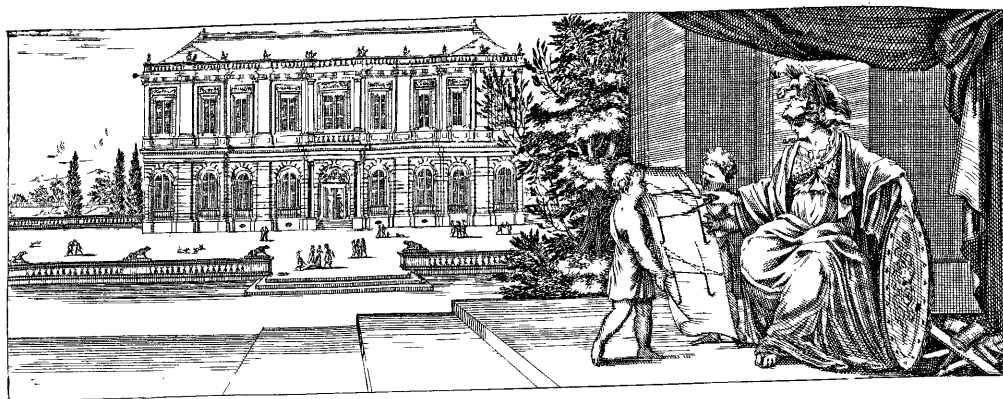
Et quoy qu'entre ces lignes j'aye seulement choisi pour exemplè celles dont l'Axe transverse estoit égal au plus grand diametre de la Colonne, ce n'a pas esté pour estre plus aisées, ou plus utiles que les autres, mais seulement parce que cette grandeur s'est trouvée ainsi déterminée.

De toutes ces choses, on peut juger si je n'ay pas eû raison de souhaiter au premier Discours de ce Probleme, que l'Auteur *du Paradoxe proposé à résoudre à tous les Architectes*, se fust un peu plus clairement fait entendre de la nature de la ligne, que l'on peut, comme il dit, décrire *Architectoniquement parfaitement* pour le renflement & diminution des Colonnes; puis qu'après que quelqu'un en aura décrit *Architectoniquement parfaitement* une infinité par les manières cy-dessus dites, il dépendra toujours de la volonté de l'Auteur *du Paradoxe* de s'en réserver une infinité d'autres, & dire qu'on n'aura pas encore trouvé la sienne.

Outre que cette même infinité de lignes qui se trouve dans ces trois sections de Cone, que M. des Cartes appelle lignes du premier Genre, dont les Equations ne montent qu'aux quarrés, se rencontre de même dans toutes les lignes des Genres plus élevez, lesquels estant d'ailleurs infinis, produisent encore une infinité d'infinité de lignes régulières, uniformes, que l'on peut décrire *Architectoniquement parfaitement*, & qui sont propres à résoudre *le Paradoxe* proposé.

Sans parler d'une autre infinité de lignes, qui ne sont pas comprises sous ces Genres, comme de la Roulette, Ovals de M. des Cartes, Spirales, Cyffoïdes, Conchoïdes, Quadratrices, &c. lesquelles sont aussi lignes uniformes & régulières, & qui par conséquent peuvent faire effet dans cette description.





RESOLUTION DES QUATRE PRINCIPAUX PROBLEMES D'ARCHITECTURE.

*SECOND PROBLEME RESOLV.
L'Apollonius François des Tactions, ou décrire Géométrique-
ment les Arcs rampans sur toutes sortes de pieds
droits & de hauteur.*

PREMIER DISCOURS.



Il y a deux choses qui méritent d'être considérées au sujet des Arcs rampans, qui sont ordinairement mis en pratique sur des ouvertures & hauteurs données ou non données; l'une regarde la manière de les décrire, & qui fait le sujet du présent Problème; l'autre traite du moyen de tirer leurs joints de teste, qui est expliqué dans le Problème suivant.

Première Observation.

Sur la manière de décrire les Arcs rampans, je me suis souvent étonné que la pratique que Pappus enseigne dans le 8. de ses Collèct. Mathem. de trouver les Axes d'une Ellipse, dont les diamètres de même conjugaison sont donnez, ne fust pas en usage

usage parmi les Ouvriers pour la description de ces Arcs , veû qu'elle y est si utile & si aisée.

Et après avoir medité sur les causes qui peuvent l'avoir jusqu'icy fait negliger, j'en ay trouvé deux assez apparentes. La première est, qu'il ne paroît pas facilement qu'il y ait aucun rapport entre la proposition de Pappus, & la description de ces Arcs rampans, parce qu'il faut une préparation assez difficile sur les lignes données, que l'Ellipse ou l'Arc proposé doit toucher en certains points, afin de trouver ses diametres de même conjugaison, auparavant que l'on y puisse appliquer ce Probleme de Pappus. L'autre raison est, que ce Probleme dans l'Auteur n'est expliqué que Mécaniquement, quoy que sa résolution soit purement Géométrique, & n'ayant esté démontré ny par Pappus, ny même par Commandin qui l'a commenté, on a dû jusqu'icy douter de sa verité ; & l'apprehension que l'on a eû de travailler sur une fausse supposition, a pû estre en partie la cause qu'on ne s'y soit pas étudié.

Pour satisfaire à l'une & à l'autre de ces raisons, j'ay travaillé à donner une description aisée de ce qu'il faut faire pour cette préparation, c'est à dire, pour trouver les diametres de même conjugaison d'une Ellipse, ou autre section qui doit toucher certaines lignes données en certains points dans tous les cas qui se peuvent proposer ; (ce qui peut en Géometrie porter le nom d'Apollonius des Tactions.) Et après y avoir joint des Pratiques entières & démontrées, j'ay aussi voulu faire connoître, que l'on pouvoit se servir assésûrement de la regle de Pappus, de laquelle j'ay fait une Démonstration purement Géométrique, afin que les Ouvriers la puissent dorenavant mettre en usage au lieu de celles qu'ils emploient, qui sont ou fautives & défectueuses, ou trop embarrassées.

Seconde Observation.

ON peut donc construire les Arcs rampans par des Ovals qui sont faites par l'atouchement de certaines portions de Cercles, ou par le moyen des Sections Coniques, ou même par une infinité d'autres lignes de divers genres. Je ne diray rien de la première manière, parce qu'elle a esté curieusement recherchée & heureusement décrite par le sieur Bosse dans ses derniers Ouvrages d'Architecture. La troisième façon de les décrire par des lignes d'un autre genre que les Sections Coniques est si vaste, ou pour mieux dire si embarrassée, qu'elle ne peut pas avoir grand usage dans la pratique.

Ce sera donc la seconde qui se sert des Sections Coniques que j'expliqueray dans ce Discours, & particulièrement ce qui regarde les constructions de l'Ellipse comme de la Section, dont l'usage est plus frequent que des autres en cette matière.

Mais avant que de passer plus outre, il n'est pas hors de propos d'enseigner une chose, qui tombe tres-souvent en usage quand on traite des Sections Coniques, & dont la connoissance abregera de beaucoup les pratiques que nous déduirons cy-après. C'est ce Probleme.

Trouver une moyenne Harmonique entre deux lignes données.

LES deux lignes soient A B & C (dans la 1. Figure de la 3. Planche,) & de la plus grande A B soit retranchée la partie B D égale à C, & le reste A D divisé en deux également en E. Ensuite sur les deux lignes A D & E B comme diametres, il faut faire les deux demicercles A G D, E G B se coupans en G, d'où il faut mener les droites G B, G E, & abaisser G F perpendiculaire à A B. Je dis que la ligne B F sera celle que l'on cherche, & moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux droites données A B & C ; parce que l'angle E G B au demicercle estant

Figure 1.
de la III.
Planche.

droit, aussi-bien que les angles au point F, la ligne BE sera à EG, comme EG est à EF; c'est à dire, que EG ou ED sera moyenne Géométrique entre les deux EB & EF; & partant par conversion de raison, doublant les antecédens, & divisant, la ligne AF sera à la ligne FD comme AB est à BD; c'est à dire, que comme la première AB est à la troisième BD, ainsi AF, qui est l'excès de la première AB sur la seconde BF, est à FD, qui est l'excès de la seconde BF sur la troisième BD. Et par conséquent les trois lignes AB, FB, DB sont en continuelle proportion Harmonique, & la ligne BF est moyenne Harmonique entre les deux extrêmes AB & BD ou C. Ce qu'il falloit faire.

Il paroît de plus, que le carré de la Touchante BG estant égal au rectangle des mêmes extrêmes AB & BD, la même BG sera moyenne Géométrique entre ces lignes. Et parce que la ligne AB surpasse EB du même excès que la ligne EB surpasse DB, il s'ensuit que cette ligne EB est la moyenne Arithmétique entre les mêmes extrêmes AB & BD ou C. Voilà donc entre deux extrêmes données AB & C, trois moyennes trouvées, sçavoir l'Arithmétique BE, la Géométrique BG, & l'Harmonique BF.

Or comme dans le Triangle EBG, la ligne EB est à BG comme BG est à BF; il s'ensuit que la même BG est aussi moyenne proportionnelle Géométrique entre les deux EB & BF. Et partant que la moyenne Géométrique entre deux lignes extrêmes, est aussi moyenne Géométrique entre les deux moyennes Arithmétique & Harmonique des mêmes extrêmes. Ce qu'il faut remarquer.

Troisième Observation.

SUR ce propos il y a deux choses que je ne sçauois dissimuler. La première est l'étonnement que j'ay eû, qu'encore que l'on ait écrit de si belles choses des Sections Coniques, & qu'entre les propriétés de leurs Contingentes, celle-cy ait esté recon-
Figure 1. nuë pour une des principales & plus frequentes, puis qu'il arrive en mille façons de la III. qu'une ligne s'y trouve divisée comme AB l'est en F & en D; de sorte que la Toute AB soit à la Partie DB comme AF est à FD. Et quoy que les plus grands Géometres aient particulièrement recherché les admirables effets de cette espee de proportion, je n'ay pourtant veû jusqu'icy personne qui se soit avisé de l'appeller Harmonique. Il y en a quelques-uns qui l'ont appelée Involution; d'autres ont dit que c'estoit une moyenne & extrême raison proportionnelle; mais pas un, au moins que je sçache, ny des Anciens ny des Modernes, ne luy ont donné son veritable nom.

*M. Deza-
gues.
P. Greg.
à S. Vin-
cent.*

Quatrième Observation.

Sur les Erreurs de Pappus pour l'inscription de trois médiétez au demicercle.

LA seconde des choses que je ne sçauois dissimuler au sujet des proportionnalitez, c'est que Pappus ayant proposé la question que j'ay expliquée cy-dessus sous le nom du second Probleme dans le 3. Livre de ses Collections Mathematiques de trouver, ainsi qu'il dit, *trois médiétez dans un demicercle*, il semble qu'il n'ait pas trop bien entendu luy-même la nature de la proposition, en laquelle il a fait, à mon sens, deux fautes considérables. La première est, d'avoir repris assez legerement la solution qu'un autre en avoit faite avant luy, quoy qu'elle fust legitime. La seconde est, de l'avoir luy-même mal résoluë.

L'une & l'autre se reconnoitra par son discours & dans ses Figures. La question commence par ce titre. *Le second Probleme estoit tel.*

Prendre

Prendre trois médiétés dans le demicercle.

UN autre, dit-il, l'a expliqué en cette manière, & exposant un demicercle ABC (dans la 2. Figure de la 3. Planche) dont le centre est E , & prenant dans la droite AC quelque point comme D , & élevant la perpendiculaire DB , il a mené la ligne EB , sur laquelle ayant tiré du point D la perpendiculaire DF , il s'est contenté d'affirmer simplement qu'il avoit exposé trois médiétés dans le demicercle, sçavoir EC moyenne Arithmétique, DB Géométrique, & BF Harmonique. Or il est constant que BD est la moyenne en proportion Géométrique entre les deux AD & DC ; & que EC est moyenne Arithmétique entre les deux mêmes extrêmes AD & DC , parce que AD est à DB comme DB est à DC , & comme AD est à elle-même; ainsi l'excès des deux AD , AE , c'est à dire, AD EC est à l'excès des deux EC & CD . Mais il n'a point dit en quelle sorte BF fust moyenne en médiété Harmonique, ny de quelles lignes droites, c'est à dire, entre quelles extrêmes; mais il a seulement assuré qu'elle estoit la troisième proportionnelle aux deux EB & BD , ne sçachant pas que des trois lignes EB , BD , BF , qui sont en proportion Géométrique, il se forme une médiété Harmonique: car nous montrerons cy-dessous que deux EB , trois DB & BF ajoutées ensemble, font le plus grand terme d'une médiété Harmonique, de laquelle deux BD & BF font le moyen, & BD & BF le moindre.

Fig. II.
de la III.
Planche.

Voilà tout le discours de Pappus que j'ay traduit du Latin de Commandin, dans lequel il paroît que Pappus n'a pas connu que la ligne BF fust la moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux extrêmes AD & DC , entre lesquelles les deux EC ou EB & DB sont aussi respectivement moyennes Arithmétique & Géométrique; parce qu'il ne s'est pas souvenu de ce que nous avons fait remarquer cy-dessus, que la moyenne Géométrique entre deux extrêmes estoit aussi moyenne Géométrique entre les moyennes Arithmétique & Harmonique des mêmes extrêmes; n'estant pas possible qu'il n'eût veû, si la pensée luy en estoit venuë, que la ligne BD estant moyenne Géométrique entre les deux extrêmes AD & DC , & entre les deux lignes EB & BF , dont EB est moyenne Arithmétique entre les mêmes extrêmes AD & DC , la ligne BF ne deust estre aussi la moyenne Harmonique entre les mêmes.

Ce qui se pourroit encore démontrer d'une autre manière, en prenant (dans la 3. Figure de la 3. Planche) la ligne EG égale à DC , & menant la ligne DK qui touche le Cercle AKH fait du centre G & intervalle AG , & les lignes KI perpendiculaires à AC & GK , parce que la toute AE estant égale à la toute EC , & l'ostée GE égale à l'ostée DC , le reste AG ou GH fera égal au reste ED ; & ostant le commun EH , la ligne EG ou CD sera égale à DH ; & comme AD à DC , ainsi AD à DH ; mais la raison de AD à DC est double de celle de AD à DB , & la raison de AD à DH double de celle de AD à DK ; Donc la raison de AD à DB sera égale à celle de AD à DK ; & partant la ligne DK sera égale à DB . Maintenant si aux lignes égales GH & ED on ajoute les égales HD & DC , les toutes GD & EC ou EB seront égales; & partant GD sera à DK comme EB à BD ; mais comme GD est à DK , ainsi DK est à DI ; & comme EB est à BD , ainsi BD est à BF ; Donc DK sera à DI , comme DB est à BF ; & partant la ligne DI sera égale à la ligne BF . De plus, la ligne DK touchant le cercle, & KI estant perpendiculaire à AD , il s'ensuit que AD première est à DH troisième, comme AI différence de la première AD & seconde DI est à IH différence de la seconde ID & troisième HD , c'est à dire, que la ligne DI est moyenne Harmonique entre les deux extrêmes AD & DH ou DC . Et partant que la ligne BF égale à DI est aussi moyenne proportionnelle entre les deux AD & DC , dont DB est la moyenne Géométrique, & EB ou EC l'Arithmétique.

Fig. III.
de la III.
Planche.

Il paroît donc que le Probleme de Pappus a esté parfaitement résolu par les trois lignes EC , BD , BF , qui sont moyennes Arithmétique, Géométrique & Harmonique en un demicercle ABC , & entre mêmes extrêmes AD & DC .

Et pour ce qu'il dit ensuite, que des trois lignes en proportion Géométrique EB , BD , BF ajoutées l'une à l'autre en certaine manière, il s'en forme une médiété Harmonique : Quoy que cela soit vray, & d'une analogie, (comme il dit) ingénieuse, ainsi que nous l'avons expliqué dans un autre discours ; cela n'a point de rapport à la question présente, parce que cette médiété produite donne d'autres termes & d'autres proportions que celles qui sont proposées.

L'autre défaut se reconnoitra dans la 16. Prop. du même Livre, où il propose luy-même à résoudre le Probleme cy-dessus, qu'il prétend avoir esté mal résolu par d'autres. Il dit donc ainsi.

Faire trois médiétés dans le demicercle.

Tout ce que nous avons dit cy-dessus (dit-il) de trois médiétés, est selon l'opinion des Anciens ; mais nous montrerons maintenant qu'il est possible de faire aussi en six lignes droites & les plus petites, trois médiétés dans le demicercle.

Fig. IV.
de la III.
Planche.

Que l'on expose (dans la 4. Figure de la 3. Planche) un demicercle, dans lequel BD soit perpendiculaire, EB demidiambre, sur qui DF soit aussi à angles droits ; & par B soit menée GBH qui touche le cercle ; & après avoir continué AC en G , soit faite BG égale à BH , & tiré la ligne DKH . Je dis que EK est moyenne en médiété Harmonique, dont BE est la plus grande, & EF la moindre, parce que les angles aux points B & F estans droits, &c..... Or nous avons démontré que les droites AD , EC , DC faisoient une médiété Arithmétique, & que les droites EG , EC , ED , faisoient une autre médiété Géométrique. Nous avons donc fait trois médiétés dans le demicercle.

Dans tout ce discours de Pappus je ne vois pas bien ce qu'il entend par ces mots ; de faire au demicercle trois médiétés en six lignes les plus petites ; car quoy que les trois lignes BE , EK , EF fassent une médiété Harmonique, que les trois AD , EC , DC une Arithmétique, & les trois EG , EC , ED une Géométrique ; elles sont néanmoins plus de six lignes différentes, & elles ne sont pas toutes dans le demicercle, hors duquel s'étend la ligne EG . De plus, il ne peut pas entendre par ces six lignes trois couples d'extrêmes comme AD , DC : BE , EF : & EG , ED : entre lesquelles il faille trouver trois moyennes dans le demicercle, tant parce que pas une de ces extrêmes n'est déterminée, & qu'elles ne se trouvent non plus que les moyennes que par la construction, que parce que, comme nous venons de dire, il y a une de ces extrêmes, sçavoir EG , qui tombe hors du demicercle.

Le Probleme seroit élégant, si ayant proposé trois couples de lignes disposées en certaine manière, comme AD , DC : EG , ED : AG , & une autre, comme AL : il falloit trouver le demidiambre d'un cercle comme EC , qui fust respectivement moyenne Arithmétique, Géométrique, & Harmonique aux trois couples proposés en la même sorte qu'elle l'est Arithmétique & Géométrique aux deux couples AD , DC : & EG , ED : Mais comme elle n'est plus moyenne, mais plus grand terme au troisième couple proposé EB , EF : la proposition est défectueuse.

Ou bien à la manière que les anciens l'ont entendu & résolu, comme il dit, en cinq lignes seulement, sçavoir qu'il fallust trouver dans le demicercle les trois moyennes entre deux extrêmes, comme entre les deux AD , DC trouver AE moyenne Arithmétique, BD Géométrique, & BF Harmonique ; ou entre les deux BE , EF , ED Géométrique, & EK Harmonique ; ou enfin entre les deux AG , GC trouver EG Arithmétique, BG Géométrique, & DG Harmonique. Et ainsi une infinité d'autres.

Et Pappus auroit en cette manière évité l'obscurité qui se trouve dans son Probleme, qui fait douter qu'il l'ait bien entendu luy-même, aussi bien que son Interprete Commandin.

SECOND DISCOURS.

TROUVER LES DIAMETRES

*de mesme conjugaison des Sections, selon les différentes
sujétions des Arcs à décrire.*

MAIS pour retourner à nostre propos, après une si longue digression, il faut se souvenir de ce que nous avons enseigné pour trouver une moyenne Harmonique entre deux lignes données. Et pour commencer aux pratiques de nos Arcs rampans, nous dirons que l'on suppose un Arc à décrire sur deux pieds droits à une hauteur déterminée, ou non déterminée; & en l'un & l'autre cas ces deux pieds droits sont parallèles ou inclinez l'un à l'autre, soit en talu ou en surplomb. De plus, si la hauteur est donnée, le plan qui la détermine est parallèle au plan de la rampe de l'Arc, ou bien l'un & l'autre étant continüez se rencontrent.

Il faut donc parler de tous ces cas, & trouver premièrement sur toutes ces Hypotheses, deux diametres de mesme conjugaison d'une section Conique qui fasse l'Arc que l'on demande; & en suite appliquer à ces diametres le Probleme de Pappus, si c'est dans une Ellipse, ou d'autres pratiques, si c'est une autre Section, pour en trouver les Axes & les Foyers ou Singliots, par le moyen desquels la Section proposée puisse estre facilement dessinée.

Et pour y travailler avec ordre, nous commencerons premièrement par l'explication de ceux dont la hauteur n'est point déterminée, pour passer en suite aux autres.

PREMIERE OBSERVATION.

Décrire les Arcs, dont la hauteur n'est point déterminée.

PROBLEME PREMIER.

SOIT donc (dans les 5. 6. & 7. Figures de la 3. Planche) les deux pieds droits *Fig. V. VI. VII. de la III. Planche.* AC , BD parallèles, soit qu'ils soient à plomb (comme en la 5. & 6. Figure,) ou que l'un soit en talu & l'autre en surplomb (comme en la 7. Figure). La ligne de la rampe AB (qui conjoint les deux points A & B , où l'Arc doit toucher les pieds droits, soit qu'elle soit horizontale (comme en la 5. Figure) ou inclinée à l'horizon (comme en la 6. & 7.) soit divisée en deux également en H , & par H soit menée IHG parallèle aux pieds droits; je dis que si l'on prend deux lignes égales de part & d'autre du point H sur la ligne IG comme HG & HI à quelque distance qu'on les vueille étendre, les deux lignes AB & IG seront les diametres d'un cercle, si les lignes AH & HG sont égales, ou les Axes d'une Ellipse, si elles sont inégales; & si la ligne AB est perpendiculaire aux pieds droits (comme en la 5. Figure) ou si elle leur est inclinée (comme aux deux autres Figures) elles seront les diametres de mesme conjugaison d'une Ellipse, qui passant par les points I & G , & ayant le point H pour centre, touchera les deux pieds droits en A & B . La démonstration en est claire par la converse de la 27. du 2. des Coniques d'Apollonius.

Au reste, en cette Hypothese il n'y a que le cercle au seul cas cy-dessus, ou l'Ellipse en tous les autres, qui puissent résoudre le Probleme, n'étant pas possible de décrire aucune autre Section qui touche deux lignes parallèles.

PROBLEME SECOND.

Figure
VIII.
de la III.
Planche.

Si les pieds droits AC & BD estans tous deux en talu, (comme en la 8. Figure de la 3. Planche) se rencontrent, estant continüez en G, la ligne de la rampe AB doit estre divisée en deux également en Z; & du point G par Z, il faut mener la ligne GZY continüée indéfiniment. De plus, si vous partagez GZ en deux également en E, & qu'entre les deux points E & Z vous en preniez un autre en quelque endroit que ce puisse estre, comme en F; je dis que ce point F déterminera le sommet d'une Ellipse, qui touchera les deux pieds droits en A & B. Et que si en prenant la ligne FH égale à FZ, vous faites que comme GH est à HF, ainsi FZ soit à une quatrième ZY, le point Y en fera le centre; D'où si vous faites YN égale à FY, la toute FN en fera le diametre.

Pour trouver l'autre diametre de mesme conjugaïson, il faut du point Y mener une ligne KYI parallele à AB, & qui rencontre en K & I les lignes des pieds droits CA, DB continüées. Puis du point B il faut mener BL parallele à ZY, & entre les deux IY & LY, trouver la moyenne Géometrique YO, à laquelle il faut faire YM égale, afin que la toute MI soit divisée Harmoniquement en L & O; & que par conséquent la ligne MO soit l'autre diametre de mesme conjugaïson avec FN d'une Ellipse, qui passant par les points A & B, y touche les lignes des pieds droits CA & DB.

La démonstration s'en fait en cette sorte; parce que la ligne GH est à HF, comme FZ est à ZY, en composant, permutant & composant GY sera à FY, comme FY à ZY; & partant le quarré de FY fera égal au rectangle GYZ.

De plus, si du point A sur KI vous tirez AP parallele à ZY, il s'ensuivra que les deux BL, AP seront égales, aussi-bien que les deux YL, YP; & parce que les deux YK & YI sont aussi égales, aussi-bien que les deux YM & YO; il s'ensuivra encore que la ligne YO estant moyenne Géometrique entre les deux YI & YL, son égale YM fera aussi moyenne Géometrique entre les deux YK & YP; & les quarrés égaux des lignes YO & YM seront égaux aux rectangles égaux IYL, KYP.

Maintenant, le quarré FY estant égal au rectangle GYZ, & le quarré YO au rectangle IYL, les quarrés seront entre eux comme les rectangles: mais le rectangle GYZ est au rectangle IYL en raison composée des lignes GY à IY, c'est à dire, BL à LI, & de YZ ou BL à LY; donc le quarré de FY sera au quarré YO en raison composée des lignes BL à IL, & de BL à YL, c'est à dire, comme le quarré de BL au rectangle ILY: mais le rectangle ILY est égal au rectangle MLO, (comme nous le démontrerons cy-dessous.) Et partant le quarré BL sera au rectangle MLO, comme le quarré FY est au quarré YO, ou en prenant leurs quadruples, comme le quarré du diametre FN est au quarré du diametre MO: mais BL est parallele au diametre FN, & partant ordonnée au diametre MO; donc le point B sera dans l'Ellipse, dont les lignes FN & MO seront diametres de mesme conjugaïson. On démontrera par le mesme raisonnement, que le point A sera dans la mesme Ellipse.

Il ne reste donc plus qu'à prouver que les lignes CA & DB toucheront cette Ellipse aux susdits points A & B. Ce qui se fait ainsi. D'autant que les trois lignes GY, FY, ZY, sont en continüelle proportion Géometrique, & que YN est égale à YF; il s'ensuit, par ce que nous avons dit cy-dessus, que la toute GN est divisée Harmoniquement aux deux points Z & F; & partant par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius, que les deux droites GA & GB touchent l'Ellipse en A & B. Ce qu'il falloit démontrer.

Maintenant, afin de faire voir, (comme je l'ay promis dans la suite de la démonstration de ce Probleme) que le rectangle ILY est égal au rectangle MLO;

je

je diray ainfi. Le quarré YO est égal au rectangle IYL , par ce qui a esté dit cy-dessus; mais le quarré YO est aussi égal au quarré YL , & au rectangle MLO ; & le rectangle IYL aussi égal au même quarré YL , & au rectangle ILY ; le quarré YL avec le rectangle MLO fera égal au même quarré YL avec le rectangle YLI ; & partant, si on oste le commun quarré YL , le rectangle MLO restera égal au rectangle ILY . Ce qu'il falloit montrer.

Pour avoir une entière détermination de ce Probleme, nous dirons que GY étant à FY comme FY à ZY ; par conversion de raison, & en permutant GY fera à FY , comme GF est à FZ ; où il se voit que la ligne GY étant plus grande que FY , il faut aussi nécessairement que la ligne GF soit plus grande que FZ , c'est à dire, que FZ soit moindre que la ligne EZ , qui est la moitié de GZ , & que par conséquent, pour faire en sorte que le Probleme soit possible, il faut prendre le point du sommet F entre les deux E & Z . Où il paroist que plus on le prendra éloigné du point Z , plus l'Ellipse montera & s'agrandira à l'infini, à mesure que le sommet F s'approchera du point E ; comme au contraire, elle diminuera, & deviendra plus plate en s'approchant de la ligne de la rampe AB , à mesure que le même sommet F s'approchera du point Z .

Que si les lignes AG & BG sont égales, l'on pourra se servir d'un cercle pour la solution de ce Probleme, dont le centre sera dans la ligne GZ , au point où elle sera coupée par les lignes tirées des points A & B perpendiculaires aux lignes AC & BD . Mais en tous les autres cas de cette hypothèse, il n'y a que la seule Ellipse qui puisse servir à la solution du Probleme, étant impossible de trouver aucune autre section qui touche les deux pieds droits, & dont le sommet se trouve en dehors vers le point N .

PROBLEME TROISIEME.

Si les deux pieds droits AC & BD sont tous deux en surplomb (comme aux *Fig. IX. 9. 10. & 11. Figures de la 3. Planche*) & estans continüez, se rencontrent en G , la ligne de la rampe AB doit estre divisée en deux également en Z ; & du point G par Z , il faut mener GZ indéfiniment, & partager la ligne GZ en deux également en E . Après quoy, il faut sçavoir que cette proposition contient trois cas differens, à chacun desquels il convient une particulière Section Conique. Car ou l'on prendra le sommet en E , auquel cas la Section qui résout le Probleme est une Parabole (comme en la 9. Figure;) ou bien entre E & Z , auquel cas il faut une Ellipse (comme en la 10. Figure;) ou enfin entre E & G , & alors il faut une Hyperbole pour satisfaire à la question (comme en la 11. Figure.) Il faut donc examiner les susdits cas l'un après l'autre. *X. XI. de la III. Planche.*

Premier Cas du troisième Probleme.

Si donc vous prenez le sommet de vostre Section en E , point milieu entre G & Z (comme en la 9. Figure de la 3. Planche); & qu'aux deux lignes EZ & ZB vous trouviez une troisième proportionnelle EF , que vous fassiez en E parallele à AB ; je dis que la Parabole dont le sommet est E , le diametre EZ , & son parametre ou diametre contigu sous un angle ZEF égal à AZE , est la ligne EF , passera par les points A & B , ou elle touchera les lignes AC & BD : car la ligne EF étant troisième proportionnelle Géometrique aux deux EZ & ZB , le quarré de ZB ou de son égale ZA , fera égal au rectangle ZEF ; & partant les lignes ZA , ZB feront ordonnées au diametre EZ d'une Parabole dont le sommet sera E , & le diametre contigu EF . Et parce que EZ est égal à GE , les deux lignes GA & GB toucheront la Parabole aux points A & B , par la 33. du 1. des Coniques d'Apollonius. *Fig. IX. de la III. Planche.*

Second Cas du troisième Probleme.

Fig. X.
de la III.
Planche.

10. Figure) Si vous prenez le sommet de vostre section entre les points E & Z (comme en la Figure) au point F; & qu'après avoir fait FH égal à FZ, vous faites que comme la ligne GH est à HF, ainsi FZ soit à une quatrième ZY. Et si vous tirez par le point Y la ligne KYI parallèle à la rampe AB, & rencontrant les lignes AC, BD continuées en K & I, sur laquelle KI des points A & B, vous menez des lignes AP & BL parallèles à GY, & qu'entre les deux KY & YP, ou leurs égales IY & YL, vous faites des moyennes Géométriques de part & d'autre YM & YO; & enfin si vous prenez YN égale à YF, je dis que les deux lignes FN & MO sont diametres de mesme conjugaison d'une Ellipse, qui touchera les deux lignes des pieds droits AC & BD aux points A & B.

La démonstration en est quasi la mesme que celle du Probleme précédent, & elle se fait ainsi. Parce que GH est à HF comme FZ à ZY, en composant, permutant, & composant, GY sera à FY comme FY à ZY; & partant le Quarré FY sera égal au rectangle GYZ. Mais le rectangle KYP ou IYL est aussi égal au quarré MY ou YO; partant le rectangle sera au rectangle comme le quarré est au quarré. Maintenant le rectangle GYZ est au rectangle KYP en raison composée des lignes GY à KY, c'est à dire, AP à KP, & ZY ou son égale AP à YP: Donc le quarré FY sera au quarré MY en raison composée des lignes AP à KP, & AP à PY, c'est à dire, comme le quarré AP est au rectangle KPY. Mais le rectangle KPY est égal au rectangle MPO (comme nous dirons cy-dessous) Donc le quarré FY est au quarré MY, ou prenant leurs quadruples, le quarré du diamètre FN est quarré du diamètre MO, comme le quarré AP est au rectangle MPO. Nous prouverons par le mesme discours que le quarré BL a aussi la mesme raison au rectangle MLO; mais les lignes AP & BL sont parallèles au diamètre FN, elles seront donc ordonnées au diamètre MO, & les points A & B seront dans l'Ellipse, dont le centre sera Y, & les lignes FN, MO diametres de mesme conjugaison.

Je dis de plus, que ladite Ellipse touchera les lignes AC, BD aux mesmes points A & B, parce que la ligne FY est moyenne Géométrique entre les deux GY & YZ; & YN est égale à FY: la route GN sera divisée Harmoniquement aux deux points F & Z, & la ligne GZ sera moyenne Harmonique entre les deux extrêmes GN & GF; & la ligne AZ est égale à ZB & parallèle à MO; donc les deux lignes AG & BG toucheront aux points A & B l'Ellipse dont le sommet est F, les diametres de mesme conjugaison FN & MO, & les ordonnées AZ & BZ, par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius.

Il ne reste donc plus qu'à démontrer que les deux rectangles KPY & MPO sont égaux, ce qui se fait en cette manière. Le quarré MY & le rectangle KYP sont égaux; mais le quarré MY est égal au rectangle MPO avec le quarré PY; & le rectangle KYP est égal au rectangle KPY avec le mesme quarré PY; étant donc des égaux le mesme quarré PY, les restes seront égaux, sçavoir le rectangle KPY au rectangle MPO. Ce qu'il falloit démontrer.

Que si les lignes AG & BG sont égales, & que des points A & B l'on mene des lignes perpendiculaires aux mesmes AC & BD, elles se rencontreront dans la ligne GZ en un point qui sera le centre d'un cercle utile pour la solution de ce Probleme.

Troisième Cas du troisième Probleme.

Fig. XI.
de la III.
Planche.

ENFIN, si vous prenez le point F entre E & G (comme en la 11. Figure); & que FH étant prise égale à GF, vous fassiez que comme ZH est à HF, ainsi FG soit

soit à une quatrième GY ; puis par le point Y , si vous tirez indéfiniment la ligne KYI parallèle à la ligne de la rampe AB , & rencontrant les lignes CA & DB continuées en K & I , sur laquelle IK des points A & B vous fassiez tomber les lignes AP & BL parallèles à ZY , afin qu'entre les deux PY & YK , ou leurs égales LY & IY , vous puissiez prendre les moyennes Géométriques de part & d'autre YM & YO , & qu'enfin vous fassiez YN égale à YF .

Je dis que Y est le centre d'une Hyperbole, dont les diamètres de même conjugaison sont FN & MO , & le sommet F , laquelle passant par les points A & B , y touchera les deux pieds droits AC & BD .

Parce que la ligne MY ou OY est moyenne Géométrique entre les deux PY & YK , ou leurs égales LY & IY ; le carré de MY ou de YO sera égal au rectangle KYP . De plus, parce que ZH est à HF , comme FG est à GY , en composant, & permutant ZF sera à FY comme HF ou son égale FG à GY , & en composant ZY sera à FY comme FY à GY ; & partant le carré de FY sera égal au rectangle ZYG . Donc le carré FY sera au carré MY , comme le rectangle ZYG est au rectangle KYP : Mais le rectangle est au rectangle en raison composée des lignes ZY à YP ou son égale AZ , & de YG à YK , c'est à dire, (à cause de la similitude des triangles GZA , $G Y K$,) de GZ à la même AZ : Donc le carré FY sera au carré MY , en raison composée des lignes YZ à AZ , & GZ à AZ , c'est à dire, comme le rectangle YZG au carré AZ . Mais le rectangle YZG est égal au rectangle NZF , (ainsi que nous le démontrerons cy-après;) Et partant le carré FY sera au carré MY , ou prenant leurs quadruples, le carré du diamètre NF sera au carré du diamètre MO , comme le rectangle NZF est au carré AZ : Mais la ligne AB est parallèle à MO , & divisée en deux également en Z ; Donc l'Hyperbole dont le sommet est F , le centre Y , & les diamètres de même conjugaison NF & MO , passera par les points A & O .

Je dis de plus, qu'elle y touchera les lignes des pieds droits AC & BD : ce que je prouve en cette manière. D'autant que la ligne FY est moyenne Géométrique entre les deux ZY & GY , & que NY est égale à FY , la toute NZ sera divisée Harmoniquement aux deux points G & F ; & la ligne GZ sera la moyenne Harmonique entre les deux extrêmes NZ & FZ ; & par conséquent, par la 34 du 1. des Coniques d'Apollonius, les deux lignes AG & BG toucheront l'Hyperbole en A & B .

Il ne reste plus qu'à prouver que le rectangle YZG est égal au rectangle NZF : ce que je fais ainsi. Puis que ZY est à FY , comme FY est à YG ; par conversion de raison, & en permutant ZY sera à FY ou son égale YN comme FZ à FG ; & composant ZN sera à YN comme ZG à FG ; & par conversion de raison ZN sera à ZY comme ZG est à ZF ; & partant le rectangle des moyennes YZG sera égal au rectangle des extrêmes NZF . Ce qu'il falloit démontrer.

SECONDE OBSERVATION.

Décrire les Arcs rampans dont les hauteurs sont données.

PREMIERE HYPOTHESE.

Quand les lignes des pieds droits sont parallèles.

PROBLEME QUATRIEME.

Fig. XII. XIII. de la III. Planche. SI les pieds droits AC, BD sont parallèles (comme aux 12. & 13. Figures de la 3. Planche) & la ligne EF, qui détermine la hauteur, est aussi parallèle à celle de la rampe AB; en ce cas il ne faut que diviser la ligne AB en deux également en H, & tirer par le point H la ligne IHG parallèle aux lignes des pieds droits, & rencontrant EF en G; puis en prenant de l'autre part du point H la ligne HI égale à HG, le point H fera le centre, & les deux lignes AB, GI diamètres de même conjugaison d'une Ellipse, laquelle touchera les deux pieds droits aux points donnez A & B, & la ligne EF en G; avec cette différence, que si AB est perpendiculaire aux pieds droits, & que HG soit égale à AH, les deux AB & IG seront les diamètres d'un Cercle, ou les Axes de l'Ellipse proposée, si HG & AH sont inégales.

La démonstration est toute entière dans la 32. du 1. & la converse de la 27. du 2. des Coniques d'Apollonius.

PROBLEME CINQUIEME.

Figure XV. de la III. Planche. SI les pieds droits AC, BD étant parallèles, la ligne EF qui détermine la hauteur rencontre la ligne de la rampe AB comme au point I, soit de la part de B, (ainsi que la 14. Figure de la 3. Planche,) ou de la part de A (comme en la 15. Figure;) il faudra diviser comme dessus la ligne AB en deux également au point H, & tirer HG indéfiniment de part & d'autre du point H, & parallèle aux pieds droits, qui coupe la ligne EF au point G. Puis il faut faire GK égale à GF, & mener IK, à laquelle il faut aussi mener du point F une ligne parallèle FL, & faire la ligne GM égale à GL. Je dis que le point M sera celui où l'Ellipse que l'on cherche doit toucher la ligne EF; & que si après avoir mené MN parallèle à AB, vous faites HO égale à HN, & sur la ligne GO comme diamètre, vous décrivez un Cercle GRO, qui coupe en R la ligne HR, tirée du point H perpendiculaire à HG, faisant ensuite les deux lignes HP, & HQ égales à HR, vous aurez les deux lignes PQ & AB pour ses diamètres de même conjugaison.

La démonstration s'en fait en cette manière, après avoir mené la ligne MV parallèle à HG. D'autant que GK est égale à GF, GL à GM, & LF parallèle à IK, la ligne IG sera à GK, c'est à dire, GF, comme GF est à GL, c'est à dire, GM. Et parce que MV est parallèle à GH, la ligne IH sera à AH ou HB, comme IG est à GF; & AH ou HB à HV, comme FG à GM, c'est à dire, que HB sera moyenne Géométrique entre les deux IH & HV; & parce que AH est égale à HB, la toute AI dans la 14. Figure sera divisée Harmoniquement aux deux points V & B, ou dans la 15. Figure la toute BI aux deux points V & A, & en l'une & en l'autre la ligne VI sera la moyenne Harmonique entre les deux AI & BI: Et par conséquent HV sera à VB, comme HB à BI; & AI à IH, comme VI à IB. Par le même raisonnement nous montrerons que le rectangle GHO, c'est à di-

re,

re, GHN étant égal au carré de HR ou HP, les trois lignes QG, NG & PG sont aussi en continue proportion Harmonique.

Maintenant la raison du carré HB, c'est à dire, du rectangle IHV au rectangle AVB étant composée des raisons des lignes IH à AV, & HV à VB, c'est à dire, HB à BI; & cette composition étant la même que celle de IH à BI, c'est à dire, AI à IV, & de HB à AV; & celle-cy étant encore la même que de AI à AV, & de HB à IV; il s'ensuit que la raison du carré HB au rectangle AVB sera composée des raisons de AI à AV, & de HB à IV. Mais parce que AI est à IH, comme VI est à BI, en permutant, & par conversion de raison dans la 14. Figure, ou en divisant dans la 15; AI sera à AV, comme IH à HB; & partant la composition de raisons de AI à AV, & de HB à IV, sera la même que celle de IH à HB, & de HB à IV, c'est à dire, la même de IH à IV. Le carré donc de HB, c'est à dire, le rectangle AHB sera au rectangle AVB, comme IH est à IV, c'est à dire, comme GH est à MV ou HN: Mais comme GH est à HN, ainsi est le carré PH, c'est à dire, le rectangle QHP au carré de HN ou MV; Donc le rectangle AHB sera au rectangle AVB, comme le rectangle QHP est au carré de MV; & en permutant le rectangle AHB sera au rectangle QHP, comme le rectangle AVB est au carré de MV. Et partant l'Ellipse dont AB & QP seront diamètres de même conjugaison, passera par le point M, d'où sont tirées les deux ordonnées MV & MN parallèles auxdits diamètres.

Il paroît encore qu'elle touchera les deux pieds droits AC & BD aux points A & B, parce que ces points sont au bout du diamètre AB, & que les pieds droits sont parallèles à l'autre diamètre PQ. Je dis de plus, qu'elle touchera la ligne EF au point M; ce qui est clair par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius.

Si la ligne de la rampe étant perpendiculaire aux pieds droits, la ligne tirée du point H en M se trouvoit aussi perpendiculaire à celle de la hauteur EF, & égale à l'une des deux AH ou BH, ce seroit un Cercle qui résoudroit la question, dont le centre seroit H, & le diamètre AB; ce qui est clair par ce qui a été démontré cy-dessus.

SECONDE HYPOTHÈSE.

Quand les pieds droits se rencontrent, & la ligne de la hauteur est parallele à celle de la rampe.

PROBLEME SIXIEME.

SI les pieds droits AC & BD ne sont point parallèles, mais en talu (comme en la 16. Figure de la 3. Planche,) en sorte qu'étant continués, ils se rencontrent au dessous au point G, de la part de C & D; & si la ligne EF qui détermine la hauteur est parallele à celle de la rampe, il faut couper la susdite ligne AB en deux également au point Z, par lequel de G il faut tirer indéfiniment la ligne GZ, qui coupera aussi EF en deux également en H; duquel point H il faut tirer la ligne HB, & la couper en deux également en X, par où du point F il faut mener la ligne FX qui rencontre GZ en Y, puis mener AH & EY qui se rencontrent en V. Je dis que Y sera le centre de l'Ellipse, qui touchera les trois lignes AC en A, BD en B, & EF en H. Et que si l'on fait YN égale à YH, & que menant par le point Y la ligne KYI parallele à AB, & AP, BL parallèles à GY, l'on fasse YM moyenne Géométrique entre les deux KY & YP, & YO égale à YM: les deux lignes NH & MO en seront les diamètres de même conjugaison.

Figure
XVI.
de la III.
Planche.

La démonstration s'en fait en cette manière, après avoir tiré les lignes ZX , ZV , AY & BY . D'autant que la ligne KYI est parallèle à AB , elle sera divisée également en Y ; & partant les deux triangles EYK , FYI sur bases égales, & entre mêmes parallèles seront égaux, aussi-bien que les deux AYK , BYI . Et partant les deux triangles EYA , FYB seront égaux; mais les deux EHY , FHY sont aussi égaux. Il y aura donc même raison du triangle EYA au triangle EHY , que du triangle FYB à FHY : Mais les triangles EYA & EYH ayans même base EY , sont entre eux comme les lignes AV & VH ; & les triangles FYB , FYH comme les lignes BX & XH : Donc les lignes AV & VH seront entre elles comme les lignes BX & XH ; mais ces dernières sont égales par la construction: Donc les deux autres AV & VH seront aussi égales; & partant VX fera parallèle & égale à la moitié de AB , c'est à dire, à AZ . Et parce que dans le triangle ABH , la ligne HB est à BX comme AB est à BZ , la ligne XZ fera parallèle & égale à la moitié de la base AH , c'est à dire, à VH . Par la même raison VZ fera parallèle & égale à XH .

Maintenant, si l'on continuë les lignes HB , EY jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en R : Comme nous avons montré que AZ estoit égale à VX ; AZ fera à EH , c'est à dire, ZG à GH , comme VX est à la même EH , c'est à dire, XR à RH ; & en changeant, & par conversion de raison GH fera à HZ , comme RH à HX , ou à son égale VZ . Mais à cause de la similitude des triangles HYR , VYZ , le costé RH est à VZ comme HY est à YZ : Donc GH fera à HZ comme HY est à YZ ; & en permutant, & divisant GY fera à HY comme HY à YZ ; c'est à dire, que HY , ou son égale NY fera moyenne Géométrique entre les deux GY & YZ ; & partant la toute GH fera divisée Harmoniquement en Z & N ; & la ligne GZ fera moyenne Harmonique entre les deux GH & GN ; & GY moyenne Arithmétique entre les mêmes. Par même raisonnement nous montrerons que KP est moyenne Harmonique entre les deux OK & KM ; & KY moyenne Arithmétique entre les mêmes: aussi-bien qu'entre les deux MI & IO , la ligne IL fera moyenne Harmonique, & IY Arithmétique.

Maintenant nous pourrons faire voir par le même discours dont nous nous sommes servis aux précédentes propositions, que le rectangle HYN est au rectangle MYO , comme le carré de AP est au rectangle KPY , ou son égal MPO ; & comme le carré BL est au rectangle YLI ou son égal OLM ; & comme AP & BL sont parallèles à NH , elles seront ordonnées au diamètre MO ; & l'Ellipse, dont les diamètres de même conjugaison seront HN & MO , passera par les points A & B , où elle touchera aussi les lignes AG , BG par la 34. du 1. des Coniques, & la ligne EF en H par la converse de la 6. du 2. du même. Ce qu'il falloit démontrer.

Que si les deux lignes AG & BG étant égales, & AY perpendiculaire à AC , elle se trouvoit égale à YH ; ce seroit un Cercle, qui résoudroit le Probleme dont le centre seroit Y , & YH demidiambre.

P R O B L E M E S E P T I E' M E.

Figures XVII. XVIII. XIX. de la III. Planche. Si les pieds droits AC & BD ne sont point parallèles, mais en surplomb (comme aux 17. 18. & 19. Fig. de la 3. Planche, en sorte qu'étant prolongez, ils se rencontrent au dessus, comme au point G de la part de A & B ; & si la ligne EF , qui termine la hauteur de l'Arc à décrire est parallèle à celle de la rampe AB . Il y a trois Cas differens en cette proposition, qui demandent chacun une Section Conique pour leur solution, en la même manière que nous avons dit en l'explication du troisième Probleme cy-dessus: Car après avoir divisé la ligne de la rampe AB en deux également en Z , & tiré du point G la ligne GZ ; Il arrivera que la ligne EF passera par le milieu de la susdite ligne GZ en H (comme en la 17. Figure,) ou bien elle passera au dessous (comme en la 18. Figure;) en sorte que la ligne ZH soit

soit moindre que HG ; ou enfin elle passera au dessus (comme en la 19. Figure,) en sorte que GH soit moindre que HZ . Au premier cas il faudra une Parabole pour résoudre la question; au second une Ellipse; au troisième une Hyperbole. Et pour les traiter avec ordre.

Premier Cas du Probleme septième.

SOIT (comme en la 17. Figure de la 3. Planche,) la ligne de la hauteur EF , qui passe au point H , où la ligne GZ est divisée en deux également; & après avoir tiré les deux lignes AH & BH , soit BH aussi partagée en deux également en X , & tirée indéfiniment FX , à laquelle du point E il faut mener EV parallèle. Je dis que la section qui touchera les trois lignes AC , BD , & EF aux points A , B , & H , sera une Parabole. Ce que je démontre en cette manière.

Figure
XVII.
de la III.
Planche.

D'autant que la ligne GZ est double de HZ , & que EF est parallèle à AB , la ligne GB sera aussi double de BF , & GA double de EA : Mais la ligne BH est aussi double de BX ; & partant dans le triangle $GH B$, la ligne GB sera à BF comme HB à BX : Donc la ligne FX sera parallèle à GH . De plus, la ligne EV ayant été faite parallèle à FX , elle le sera aussi à GH ; & partant dans le triangle GHA , la ligne GA sera à AE comme HA à AV : Mais GA est double de AE ; donc HA sera aussi double de AV ; c'est à dire, que la ligne EV divisera AH en deux également en V ; aussi-bien que FX la ligne BH en X ; & GZ la ligne AB en Z . Et partant par la 29. du 2. des Coniques d'Apollonius, les trois lignes GZ , FX , EV seront diamètres d'une section, que les lignes AC , BD & EF toucheront aux points A , B , & H : Mais ces trois diamètres sont parallèles; donc la section sera une Parabole par la 46. du 1. des mêmes Coniques. Si donc nous faisons HI troisième proportionnelle Géométrique aux deux lignes HZ & AZ ; & si nous décrivons une Parabole, dont le diamètre soit HZ , son paramètre ou diamètre contigu HI , le sommet H , & l'angle des ordonnées GHE ; elle passera par les points susdits A , B , & H , où elle touchera les trois lignes AC , BD , & EF .

Et premièrement, il est constant qu'elle passera par le point H , puis qu'il en est supposé le sommet; en suite HI étant troisième proportionnelle Géométrique aux deux HZ & AZ , le carré AZ ou BZ sera égal au rectangle ZHI ; & partant les deux points A & B seront dans la Parabole, laquelle touchera les lignes AC & BD aux mêmes points, par la 33. du 1. des mêmes Coniques, & la ligne EF en H par la converse de la 46. du même.

Second Cas du Probleme septième.

QUE si la ligne de la hauteur EF coupe GZ , en sorte que GH soit plus grande que HZ (comme en la 18. Figure de la 3. Planche;) après avoir tiré les lignes AH & BH , & divisé HB en deux également en X , tiré FX jusqu'à ce qu'elle rencontre GZ au point Y , & mené EY . Je dis que le point Y sera au dessous du point H vers Z , & que la section qui touchera les trois lignes AC , BD , EF aux points A , B , H , sera une Ellipse, dont le centre sera Y . Et partant si nous faisons YN égale à YH , & qu'après avoir mené par le point Y la ligne KYI parallèle à AB , & sur laquelle tombent les lignes AP & BL parallèles à GZ , nous faisons (ainsi qu'il s'est dit tant de fois) YM & YO moyennes Géométriques entre KY & YP , ou entre IY & YL , les deux lignes HN & MO en seront les diamètres de même conjugaison.

Figure
XVIII.
de la III.
Planche.

Il se démontre en cette manière, après avoir continué les lignes VE , BX jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en R , & mené les lignes VX , VZ , XZ : AY , BY : & F parallèle à GY . D'autant que GH est plus grande que HZ , & EF parallèle à AB , la ligne GF sera aussi plus grande que FB : Mais HX est égale à BX ; donc dans le

triangle GHB la ligne GF aura plus grande raison à FB que HX à BX, & en composant GB aura plus grande raison à FB que HB à BX: Mais comme GB est à FB, ainsi HB est à B η : Et par conséquent HB aura plus grande raison à B η qu'à BX; & partant BX sera plus grande que B η ; & le point X sera entre η & H; & l'angle BFY sera plus grand que l'angle BFA, c'est à dire, BGZ: Et partant la ligne FY rencontrera GZ continuée de la part de Z au point Y.

De plus, comme les triangles KEY, IFY, sur bases égales KY & IY, & entre mesmes parallèles KI, EF, sont égaux; aussi-bien que les triangles KAY, IBY, & EYH, FYH. Si des égaux KEY, IFY on ôte les égaux KAY, IBY; les restes seront égaux, c'est à dire, les triangles AEY, BFY: Et partant le triangle AEY aura mesme raison au triangle EYH que BFY à FYH. Mais les triangles AEY, EYH ayans mesme base EY, sont entre eux comme les lignes AV & VH; & les triangles BFY, FYH ayans aussi mesme base FY, sont comme les lignes BX & XH; la ligne AV sera à VH comme BX est à XH: Mais BX est égale à XH par la construction; donc AV sera aussi égale à VH; & partant la ligne EY couperait AH en deux également en V; aussi-bien que FY, la ligne BH en X; & GY la ligne AB en Z; & le point Y a été démontré au dessous du point G vers Z: Et par conséquent les trois lignes EY, FY, GY seront diamètres d'une Ellipse qui touchera les trois lignes AG, BG, EF aux points A, B, & H, par la 29. du 2. des Coniques d'Apollonius.

Je dis de plus, que les lignes HN & MO en seront les diamètres de mesme conjugaison. Comme AH est double de HV, aussi-bien que BH double de HX: la ligne VX dans le triangle AHB sera parallèle, & égale à la moitié de la ligne AB, c'est à dire, à AZ. Par la mesme raison XZ dans le mesme triangle sera égale, & parallèle à la moitié de la ligne AH, c'est à dire, à VH; & VZ égale & parallèle à HX; & partant AZ sera à EH, c'est à dire, ZG à GH, comme VX à la mesme EH, c'est à dire, XR à RH: & en changeant & divisant GH sera à HZ comme RH à HX, ou à son égale VZ. Mais parce que dans le triangle RHY, la ligne RH est à VZ comme HY à YZ; la ligne GH sera à HZ comme HY à YZ; & en permutant & composant GY sera à HY comme HY à YZ: c'est à dire, que HY sera moyenne Géométrique entre les deux GY & YZ; mais YN est égale à YH. Donc la toute NG est divisée Harmoniquement aux points Z & H; & GZ est moyenne Harmonique entre les deux NG & GH; & GY moyenne Arithmétique entre les mesmes.

Maintenant nous démontrerons, ainsi qu'en la précédente proposition, que le carré de AP ou BL est au rectangle MPO ou OLM, comme le carré du diamètre HN est au carré du diamètre MO. Mais les lignes AZ & BZ sont égales entre elles, & parallèles à MO; elles sont donc ordonnées à l'autre diamètre HN dans l'Ellipse, dont les diamètres de mesme conjugaison sont HN & MO, laquelle touchera les lignes AC, BD en A & B, par la 34. du 1. des Coniques, & EF en H par la converse de la 6. du 2. des mesmes.

Que si les lignes AG & BG estoient égales, & AY étant perpendiculaire à AC se trouvoit égale à YH; ce seroit un cercle qui satisferoit au Probleme dont le centre seroit Y, & le diamètre YH, ou AY.

Troisième Cas du septième Probleme.

ENFIN si la ligne de la hauteur EF coupe GZ, en sorte que GH soit moindre que HZ (comme en la 19. Figure de la 3. Planche,) après avoir tiré comme cy-dessus les lignes AH, BH, & divisé BH en deux également en X, & mené FX indéfiniment de part & d'autre, laquelle rencontre GZ prolongée en Y, & AB en T, & tiré EY indéfiniment de part & d'autre, qui rencontre AH en λ , & AB en S.

Figure
XIX. de
la III.
Planche.

Je dis que le point Y fera dans la ligne GZ prolongée de la part de G, & que la section qui touchera les trois lignes AC, BD, EF aux points A, B & H, fera une Hyperbole, dont le centre sera Y. Et partant si nous faisons YN égale à YH, & ayant mené la ligne PYL par le centre Y, & parallèle à AB, si nous continuons AG & BG jusqu'en K & I; & tirant AP & BL parallèles à GZ, si nous prenons YM & YO moyennes Géométriques entre les deux KY & YP, ou leurs égales IY & YL: les lignes NH & MO en feront les diamètres de même conjugaison.

Il se démontre ainsi, après avoir mené la ligne XQV parallèle à AB, & rencontrant la ligne YE au point V. D'autant que EF est parallèle à AB, & AZ égale à BZ; EH sera aussi égale à FH; Mais dans le triangle YZS, la ligne EH est à ZS comme YH est à YZ; Et dans le triangle YZT, comme YH à YZ, ainsi HF à ZT; Donc EH sera à ZS comme HF à ZT; & partant ZS sera égale à ZT. Mais ZT est à QX comme ZS à VQ; Donc QX sera aussi égale à QV; & partant BZ sera à QX, c'est à dire, ZH à HQ comme AZ à VQ; Et par conséquent le point V est dans la ligne AH, & le même que le point λ, & en la même raison de AH à HV, comme de ZH à HQ, ou BH à HX; c'est à dire, que la ligne YES coupera AH en deux également en V, comme YFT la ligne BH en X, & YHZ la ligne AB en Z: & le point Y est au dessus du point G, comme nous le démontrerons cy-dessous; Et par conséquent les trois lignes YES, YFT, YHZ, seront diamètres d'une Hyperbole qui touchera les trois lignes AC, BD, EF aux points A, B & H, par la 29. du 2. des Coniques.

Je dis de plus, que les lignes HN & MO en sont les diamètres de même conjugaison, après avoir continué la ligne BH jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne EY en R, & mené VZ. Nous démontrerons comme en la proposition précédente, que VX est parallèle & égale à AZ, & VZ parallèle & égale à HX; & que par conséquent AZ sera à EH, c'est à dire, ZG à GH comme VX à la même EH, c'est à dire, XR à RH; & en changeant & divisant GH sera à HZ comme RH à HX ou à son égale VZ. Mais dans le triangle YVZ, la ligne RH est à VZ comme YH est à YZ; Donc YH sera à YZ comme GH à HZ; & en changeant, permutant, & par conversion de raison YZ sera à YH comme YH à YG; c'est à dire, que YH sera moyenne Géométrique entre les deux YZ & YG; Et comme YN est égale à YH, la toute NZ sera divisée Harmoniquement aux points G & H, & la ligne GZ sera moyenne Harmonique entre les deux NZ & ZH, & la ligne YZ moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Maintenant, parce que le carré YH est égal au rectangle ZYG, & le carré YO au rectangle P YK; le carré sera au carré comme le rectangle est au rectangle: Mais la raison du rectangle ZYG au rectangle KYP est composée des raisons des lignes ZY à PY, ou à son égale AZ, & de YG à YK, c'est à dire, (à cause de la similitude des triangles YGK & ZGA) de GZ à AZ; Donc le carré YH sera au carré YO en raison composée des raisons de ZY à AZ, & de GZ à AZ, c'est à dire, comme le rectangle YZG au carré AZ. Mais le rectangle YZG est égal au rectangle NZH (comme nous le démontrerons cy-dessous;) Donc le carré YH sera au carré YO, ou prenant leurs quadruples, le carré du diamètre transverse NH sera au carré du diamètre droit MO, comme le rectangle NZH au carré AZ. Mais AZ est égale à ZB, & parallèle au diamètre MO, elles feront par conséquent ordonnées au diamètre NZ; & les points A & B seront dans l'Hyperbole, dont NH & MO seront diamètres de même conjugaison, & le sommet au point H.

Il paroît de plus, que les lignes AG & BG toucheront la susdite Hyperbole aux mêmes points A & B, parce que la ligne NZ est divisée Harmoniquement en G & H, par la 34. du 1. des Coniques; & la ligne EF au sommet H, parce

qu'elle est parallele à l'ordonnée AB par la converſe de la 6. du 2. des meſmes.

Il faut maintenant faire voir que le point Y eſt dans la ligne ZG prolongée de la part de G , comme nous l'avons promis cy-deſſus: ce qui ſe fait en cette manière, après avoir tiré la ligne $F\eta$ parallele à GZ . D'autant que GH eſt ſuppoſée moindre que HZ , & que EF eſt parallele à AB ; GF fera auſſi moindre que FB ; Mais HX eſt égale à XB ; Donc GF aura moindre raiſon à BF , que HX à XB ; & en compoſant GB aura moindre raiſon à BF , que HB à BX ; Mais comme GB à BF , ainſi HB à $B\eta$; Donc HB aura moindre raiſon à $B\eta$ qu'à BX ; Et partant $B\eta$ ſera plus grande que BX , & l'angle BFX moindre que l'angle $BF\eta$, ou ſon égal BGH : Et partant la ligne XF rencontrant ηF en F , rencontrera auſſi ſa parallele ZG prolongée au deſſus de G en Y .

De plus, il faut montrer que les rectangles YZG & NZH ſont égaux; ce qui ſe fait ainſi. Parce que ZY eſt à YH comme YH à YG , par converſion de raiſon, & en permutant ZY ſera à HY , ou à ſon égale YN comme ZH à GH , & en compoſant, & par converſion de raiſon NZ ſera à YZ comme GZ à HZ . Et partant le rectangle des moyennes YZG ſera égal à celui des extrêmes NZH . Qui eſt tout ce qu'il falloit démontrer.

TROISIEME HYPOTHESE.

Quand les pieds droits ne ſont point parallels entre eux, ny la ligne de la hauteur à celle de la rampe.

PROBLEME HUITIEME.

Figure I.
de la IV.
Planche.

SI les pieds droits AC , BD ne ſont point parallels, mais en talu (comme en la I. Figure de la 4. Planche) en ſorte qu'eſtant prolongez, ils ſe rencontrent au deſſus, comme au point G de la part de C & D . Et ſi la ligne EF , qui détermine la hauteur de l'Arc à décrire, n'eſt point parallele à celle de la rampe AB ; mais l'une & l'autre eſtant prolongées, ſe rencontrent comme au point I .

Il faut premièrement couper la ligne AB en deux également en Z , & tirer indéfiniment la ligne GZ ; puis entre les deux EI & IF trouver une moyenne proportionnelle Harmonique IH , & du point H mener les deux HB & HA ; enſuite il faut diviſer HB en deux également en X , & mener FX qui rencontrera la ligne GZ prolongée en Y , & joindre les points EY .

Je dis que Y ſera le centre d'une Ellipſe qui touchera les trois lignes AC en A , BD en B , & EF en H ; & que ſi ayant tiré la ligne HY indéfiniment, & fait YT égale à YH , l'on mene par le point Y la ligne NYM parallele à EF , ſur laquelle des points A & B l'on mene les deux $A\eta$ & BP paralleles à HT , auſſi-bien que $A\psi$ & BS paralleles à MN ; & qu'enfin entre les deux NY & $Y\delta$, l'on prenne $Y\epsilon$ moyenne Géométrique, à laquelle on faſſe $Y\beta$ égale. Je dis que les deux lignes HT & $\epsilon\beta$ ſeront les diametres de meſme conjugaiſon de la ſuſdite Ellipſe.

Pour le démontrer, il faut mener par le point Y la ligne KYQ parallele à AB , & $Y\nu$ perpendiculaire à GB , & $Y\lambda$ à GA ; puis ſur AB prolongée, des points E & F tirer les lignes $E\mu$ & $F\eta$ paralleles à GZ , & mener AY , BY ; après quoy je raiſonne en cette manière.

Puis que KQ eſt parallele à AB , & que AB eſt diviſée en deux également en Z , par la ligne GZ , la ligne KQ le ſera pareillement en Y ; & les triangles GKY , GQY ſeront égaux, & leurs coſtez ſeront en raiſon reciproque de leurs hauteurs,

hauteurs, c'est à dire, que le costé GK fera au costé GQ , c'est à dire, GA à GB , comme $Y\upsilon$ hauteur du triangle GQY est à $Y\lambda$ hauteur du triangle GYK . De plus, les triangles AEY & BFY estant l'un à l'autre en raison composée de celles de leurs costez & de leurs hauteurs, & la hauteur du triangle AEY estant $Y\lambda$, & $Y\upsilon$ celle du triangle BFY ; le triangle AEY fera à BFY en raison composée des raisons du costé AE au costé BF & de la hauteur $Y\lambda$ à la hauteur $Y\upsilon$. Mais la raison du costé AE à BF est encore composée des raisons de AE à $E\mu$, c'est à dire, (à cause de la similitude des triangles $AE\mu$ & AGZ) de AG à GZ , de $E\mu$ à $F\eta$, & de $F\eta$ à FB , c'est à dire, GZ à GB (à cause que les triangles $BF\eta$, BGZ sont aussi semblables.) La raison donc du triangle AEY à BFY fera composée des raisons de AG à GZ , $E\mu$ à $F\eta$, GZ à GB , & $Y\lambda$ à $Y\upsilon$. Mais il a esté démontré cy-dessus que $Y\lambda$ est à $Y\upsilon$ comme GB est à GA ; & les raisons de AG à GZ , & GZ à GB sont égales à celle de AG à GB ; & partant le triangle AEY fera à BFY en raison composée de AG à GB , GB à GA , & $E\mu$ à $F\eta$: Mais les raisons de AG à GB , & GB à GA se détruisent; il ne reste donc plus que la raison de $E\mu$ à $F\eta$ pour celle du triangle AEY à BFY : Mais $E\mu$ est à $F\eta$ comme EI à IF , c'est à dire, comme EH à HF par la construction, ou comme le triangle EYH au triangle HYF : Donc le triangle AEY fera au triangle BFY , comme le triangle EYH à HYF ; & en permutant AEY fera à EYH comme BFY à HYF . Mais les deux triangles AEY , EYH ayant une base commune EY , sont entre eux comme les lignes AV & VH ; & les deux BFY , HYF ayant la base commune FY , sont entre eux, par la même raison, comme les lignes BX & XH ; il s'enfuit que AV est à VH comme BX est à XH ; mais celles-cy sont égales par la construction: Donc AV sera aussi égale à VH .

Et partant la ligne EY coupant AH en deux également en V ; & la ligne FY coupant de même BH en X ; aussi-bien que GY la ligne AB en Z : il s'enfuit que les trois lignes EY , FY & GY sont diametres d'une Ellipse, dont le centre est Y , & qui touchera les trois lignes AC , BD & EF en A , B & H .

Il faut maintenant montrer que HT & $\epsilon\beta$ en sont les diametres de même conjugaison; & pour cet effet il faut des points E & F mener sur la ligne NM prolongée les lignes Ez & FR paralleles à HT , laquelle il faut continuer de part & d'autre, en sorte qu'elle rencontre AC en χ , & BD en ζ ; puis du point F mener FL parallele à BH , rencontrant TH en L ; & par le point X tirer LX , qui rencontre BD en O , & mener YO . En la même manière du point E il faut mener $E\gamma$ parallele à AH , qui rencontre TH en γ ; d'où par le point V il faut tirer γV , rencontrant AC en 3 , & mener $Y3$.

Maintenant, parce que HX est égale à XB , la ligne LF aura même raison à l'une & à l'autre; mais comme LF est à HX , ainsi (dans le triangle LYF) la ligne LY est à YH ; & comme LF est à XB , ainsi (dans le triangle LOF) la ligne LO est à OX : Donc LY est à YH comme LO à OX ; & par conversion de raison LY est à LH comme LO à LX ; & partant dans le triangle LYO , la base YO est parallele à HX , c'est à dire, à LF ; & les triangles YXO , LXF sont semblables, aussi-bien que $Y\zeta O$, $L\zeta F$: Et par conséquent YO est à LF comme YX à XF , c'est à dire, YH à HL : & YO à LF comme $Y\zeta$ à ζL : Donc YH est à HL comme $Y\zeta$ est à ζL ; & en permutant $Y\zeta$ est à YH comme ζL à HL : Mais comme $Y\zeta$ est à YH , ainsi ζM est à MF , & comme ζL à HL , ainsi ζF à FB : Donc ζM est à MF comme ζF à FB , & en permutant & par conversion de raison ζM est à MF comme MF à MB . Mais comme ζM est à MF , ainsi ζY est à FR ou à son égale HY ; & comme FM à MB , ainsi FR est à BP , c'est à dire, HY à SY : Donc ζY est à HY comme HY à SY : Et partant HY sera moyenne Géométrique entre les deux ζY & SY : Mais YT est égale à YH : Donc la toute $T\zeta$ sera divisée Harmoniquement aux deux points H

& S, & la ligne ζS fera moyenne Harmonique entre les extrêmes $T\zeta$ & $H\zeta$; & la ligne ζY fera moyenne Arithmetique entre les mesmes.

Par le mesme raisonnement nous démontrerons que AV estant égale à VH, la ligne E γ aura mesme raison à l'une & à l'autre; Mais E γ est à HV dans le triangle EY γ comme EY à YV; & E γ à AV dans le triangle E γ 5 comme E γ à 3A; EY fera à YV comme E γ à 3A, & par conversion de raison E γ estant à EA comme EY à EV; dans le triangle EY γ , la base Y γ sera parallele à AV, c'est à dire, E γ . Et partant les triangles 3 χ Y, E χ 5 sont semblables, aussi-bien que 3VY, EV5. Et par conséquent 3Y fera à E5 comme χ Y à χ 5; & 3Y à E5 comme YV à VE, c'est à dire, comme YH à H5: Donc χ Y fera à χ 5 comme YH à H5, & en permutant χ Y fera à YH, comme χ 5 à H5. Or est-il que comme χ Y est à YH, ainsi χ N est à NE, & comme χ 5 à H5, ainsi χ E est à EA; Donc χ N est à NE comme χ E est à EA: & en permutant, changeant, divisant & changeant χ N fera à NE comme NE à AN. Mais comme χ N est à NE, ainsi χ Y est à YH ou son égale YT, & comme NE est à AN, ainsi HY ou YT est à Y $\downarrow$; Et partant χ Y est à TY comme TY est à Y $\downarrow$, & TY est moyenne Géometrique entre les deux χ Y & Y $\downarrow$. Mais YH est égale à YT; Donc la toute H χ est divisée Harmoniquement aux deux points $\downarrow$ & T; & la ligne $\chi\downarrow$ est moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux extrêmes H χ & χ T; & la ligne χ Y fera la moyenne Arithmetique entre les mesmes.

Maintenant, puis que la ligne HY ou TY est moyenne proportionnelle Géometrique tant entre les deux ζ Y & YS, qu'entre les deux χ Y & Y $\downarrow$, les rectangles ζ YS & χ Y $\downarrow$ seront égaux entre eux, & au carré HY: & ils auront l'un & l'autre mesme raison au carré Y ϵ ou Y β . Mais le rectangle χ Y $\downarrow$ est au carré Y ϵ , ou à son égal le rectangle NY η , en raison composée des lignes χ Y

NY, c'est à dire, A η à N η , & de Y $\downarrow$ ou A η à Y η . Donc le carré TY fera au carré Y ϵ en raison composée des lignes A η à N η , & A δ à Y η , c'est à dire, comme le carré A δ au rectangle N δ Y: Mais le rectangle N δ Y est égal au rectangle $\epsilon\delta\beta$ (comme nous le démontrerons cy-dessous;) Et partant le carré A δ fera au rectangle $\epsilon\delta\beta$, comme le carré TY, c'est à dire, le rectangle TYH, est au carré ϵ Y, c'est à dire, au rectangle ϵ Y β . Mais la ligne A δ est parallele au diametre TH, & partant ordonnée au diametre $\epsilon\beta$; Donc le point A fera dans l'Ellipse, dont TH & $\epsilon\beta$ sont diametres de mesme conjugaison.

Par le mesme discours nous dirons que le rectangle ζ YS estant au rectangle MYP en raison composée des lignes ζ Y à YM, c'est à dire, BP à PM, & de SY ou BP à YP; Et le rectangle MYP estant égal au carré Y β (comme nous le démontrerons cy-dessous;) le rectangle ζ YS, c'est à dire, le carré HY fera au rectangle MYP, c'est à dire, au carré Y β , en raison composée des lignes BP à PM, & BP à YP, c'est à dire, comme le carré BP est au rectangle MPY: Mais le rectangle MPY est égal au rectangle ϵ P β (ainsi que nous le démontrerons cy-dessous;) Et par conséquent le carré BP fera au rectangle ϵ P β comme le carré HY, c'est à dire, le rectangle HYT est au carré Y β , c'est à dire, au rectangle ϵ Y β . Mais il a esté démontré cy-dessus, que le carré A δ estoit au rectangle $\epsilon\delta\beta$, comme le mesme rectangle HYT est au rectangle ϵ Y β ; Et partant le carré A δ fera au rectangle $\epsilon\delta\beta$, comme le carré BP au rectangle ϵ P β . Et parce que BP est parallele à A δ , c'est à dire, au diametre TH, elle fera ordonnée au diametre $\epsilon\beta$; Et par conséquent le point B fera aussi dans l'Ellipse, dont les lignes TH & $\epsilon\beta$ sont diametres de mesme conjugaison.

Je dis de plus, que les lignes AC, BD & EF toucheront la mesme Ellipse aux points A, B & H; ce qui se démontre en cette manière. Dautant que la ligne EH est

est tirée au sommet du diamètre TH parallèle à l'autre diamètre $\epsilon\beta$, elle touchera l'Ellipse en H par la 6. du 2. des Coniques d'Apollonius. De plus, la ligne A $\downarrow$ étant tirée du point A dans l'Ellipse, & parallèle au diamètre $\epsilon\beta$, & coupant l'autre diamètre TH au point $\downarrow$, de telle sorte que la ligne $\chi\downarrow$ est moyenne Harmonique entre les deux H χ & χ T; la ligne AC χ touchera l'Ellipse susdite au point A par la 34. du 1. des Coniques. Et par la même proposition la ligne BD ζ la touchera en B, d'où la ligne BS est tirée parallèle à $\epsilon\beta$, & de telle sorte, que ζ S est moyenne Harmonique entre les deux T ζ & ζ H.

Nous avons donc trouvé le point Y & les deux lignes HT & $\epsilon\beta$ pour centre, & diamètres de même conjugaison d'une Ellipse qui touchera les trois lignes AC, BD, & EF aux points A, B & H. Ce qu'il falloit faire.

Il faut maintenant faire voir, ainsi que nous l'avons promis cy-dessus, que les rectangles N δ Y & $\epsilon\delta\beta$ sont égaux, aussi-bien que les rectangles M P Y & β P ϵ ; & que le rectangle M Y P est égal au carré Y β ou Y ϵ ; ce que je fais premièrement pour les rectangles N δ Y, $\epsilon\delta\beta$ en cette manière. D'autant que le rectangle N Y δ est égal par la construction au carré ϵ Y, si l'on ôte de l'un & de l'autre le même carré δ Y, le rectangle N δ Y restera d'une part, & le rectangle $\epsilon\delta\beta$ de l'autre, qui seront par conséquent égaux.

Pour la démonstration du reste, il faut mener la ligne V X, & la continuer de part & d'autre, jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne EI au point 9, & la ligne MN prolongée au point 8. Il faut de plus continuer les lignes HB & HA qui rencontrent la même MN prolongée en 7 & 6, & faire I θ égale à IF, puis raisonner en cette sorte. D'autant que AV est égal à VH & BX à XH, la ligne AH sera à VH comme BH à XH; Et partant V X sera parallèle à AB; & IH sera à H9, comme BH à HX. Mais BH est double de HX, donc IH sera aussi double de H9. Derechef EH étant à HF comme EI à IF, en composant, permutant, & changeant E θ sera à EF comme IF est à HF. De plus, EH étant à HF comme EI à IF, en permutant & changeant EI sera à EH comme IF à HF; Et partant EI est à EH comme E θ à EF, & par conversion de raison EI sera à IH comme E θ à F θ , & en divisant EH à IH comme EF à θ F; Et partant EH à la moitié de IH, c'est à dire, H9, comme EF à la moitié de θ F, c'est à dire, IF, & en composant E9 à H9 comme EI à IF. Mais comme EI est à IF, ainsi EH à HF; Donc E9 sera à H9 comme EH est à HF, & en permutant, & par conversion de raison, E9 sera à H9 comme H9 à F9.

Or parce que dans les triangles semblables EV9, YV8 comme E9 est à H9, ainsi Y8 est à 86, & dans les triangles semblables HX9, 7X8, comme H9 est à F9, ainsi 78 est à Y8; il s'ensuit que la ligne 78 est à Y8 comme Y8 à 86, & en la même raison que E9 à H9; Mais comme 78 est à Y8, ainsi 7Y est à Y6, & comme E9 à H9, ainsi EH ou son égale 2Y est à HF, ou son égale YR; il s'ensuit donc que 7Y est à Y6 comme 2Y est à YR, & partant que le rectangle des extrêmes 7YR est égal au rectangle des moyennes 6Y2.

Maintenant, parce que ζ Y est à HY comme HY est à SY, par conversion de raison ζ Y sera à ζ H comme YH à HS; Mais comme ζ Y est à ζ H, ainsi MY est à HF ou à son égale YR; & comme YH est à HS, ainsi 7Y est à BS ou à son égale YP; Donc MY sera à YR comme 7Y à YP; & partant le rectangle des extrêmes MYP est égal au rectangle des moyennes 7YR.

De plus, parce que χ Y est à HY comme HY à Y $\downarrow$; & que χ Y est à HY comme χ N est à NE, & YN à N2; Il s'ensuit que YN est à N2 comme HY est à Y $\downarrow$, & YN à Y2 comme HY à H $\downarrow$. Mais HY est à H $\downarrow$ comme 6Y est à A $\downarrow$, ou à son égale δ Y; Donc YN sera à Y2 comme 6Y est à δ Y, & le rectangle des extrêmes NY δ sera égal au rectangle des moyennes 6Y2.

Et par conséquent le rectangle MYP sera au rectangle 7YR comme le rectangle NY δ au rectangle 6Y2, & en permutant MYP sera à NY δ comme 7YR

à $6Y^2$. Mais il a été démontré cy-dessus que les rectangles $7YR$ & $6Y^2$ sont égaux; Partant les rectangles MYP & NY^2 seront aussi égaux. Mais le carré Y , ou son égal βY est égal au rectangle NY^2 par la construction; il sera donc aussi égal au rectangle MYP .

Et si l'on ôte de l'un & de l'autre le commun carré de YP , il restera le rectangle MPY égal au rectangle $\epsilon P\beta$. Qui est tout ce que nous devons démontrer.

Le cercle pourroit aussi servir à la solution de ce Probleme, si les deux lignes AG & BG étant égales aussi-bien que les trois AY , BY , & HY , celles-cy se trouvoient aussi perpendiculaires aux lignes AC , BD , & EF , chacune à la sienne.

PROBLEME NEUVIEME.

ENFIN, si les pieds droits AC & BD ne sont point parallèles, mais en surplomb (comme aux 2. 3. & 4. Figures de la 4. Planche) en sorte qu'étant prolongez, ils se rencontrent au dessus, comme en G de la part de A & B ; & si la ligne EF , qui détermine la hauteur de l'arc à décrire, n'est point parallèle à la rampe AB , mais que l'une & l'autre étant prolongées, se rencontrent, comme en I .

Figures
II. III.
IV. de la
IV. Planche.

Il y a en cette proposition trois Cas à considérer, chacun desquels demande une section Conique particulière pour sa solution; car ou la raison de la ligne EI à IF sera la même que celle de GF à FB , ou elle sera moindre, ou elle sera plus grande. Au premier Cas (comme en la 2. Figure) il faut une Parabole. Au second Cas (comme en la 3. Figure) il faut une Ellipse. Au troisième Cas (comme en la 4. Figure) il faut une Hyperbole. Et pour les traiter avec ordre.

Premier Cas du neuvième Probleme.

Figure
I I. de
la I V.
Planche.

SOIT (comme en la 2. Figure de la 4. Planche) la ligne EI à la ligne IF , comme la ligne GF à FB ; & après avoir coupé AB en deux également en Z , & mené GZ , qui divise EF en P , il faut du point F prendre FH égale à EP .

Je dis que la section qui touchera les deux lignes AC , BD aux points A & B , & la ligne EF , sera une Parabole; & que le point H sera celui où elle touchera la ligne EF ; en sorte que si nous coupons la ligne GZ en deux également en O , & qu'aux deux lignes OZ & AZ nous fassions une troisième proportionnelle Géométrique OR , que nous menions du point O parallèle à AB , la ligne OZ en sera le diamètre sous l'angle GZA , & OR sera son parametre ou diamètre contigu. Pour la démonstration, il faut mener les lignes EL , HK , & FM parallèles à GZ , puis tirer les lignes AH & BH , qui rencontrent les lignes EL & MF prolongées en V , X , & Q , & mener VX & FK .

D'autant que HF est égale à EP , & que EL , HK , & FM sont parallèles à GZ , les deux lignes LZ & KM seront aussi égales; & par conséquent les deux LK & ZM , aussi-bien que les deux EH & PF . Et parce que EI est à IF , ainsi que GF à FB ; & que comme EI est à IF , ainsi (dans le triangle EIL) EL est à FM ; & que comme GF à FB , ainsi (dans le triangle GBZ) la ligne ZM à MB : Il s'en suit que EL sera à FM , comme ZM à MB . Mais la raison de EL à FM est composée des raisons de EL à AL , (c'est à dire, GZ à AZ) AL à MB , & MB à FM (c'est à dire, BZ ou son égale AZ à GZ :) Donc la raison de ZM à MB sera aussi égale à la composée des raisons de GZ à AZ , AL à MB , & AZ à GZ ; c'est à dire (parce que les deux raisons de GZ à AZ , & AZ à GZ se détruisent) égale à la raison de AL à MB : Et par conséquent la ligne AL sera égale à ZM , c'est à dire, à LK ; mais comme AL est à LK , ainsi AV est à VH : Donc AV sera aussi égale à VH .

Maintenant, puis que AL est égale à LK , & LZ à KM ; AZ ou BZ sera égale à LM ; & ôtant le commun ZM , les deux ZL & MB seront égales; mais

DES ARCS RAMPANS.

37

mais ZL est égale à KM : Donc les deux MB & KM seront aussi égales : Et partant dans le triangle HBK la ligne HX sera égale à XB , & HS à SK ; & les deux triangles HKA , QXV seront semblables ; & HK sera à AK , comme QX à VX ; & en permutant HK sera à QX comme AK à VX , ou à son égale LM . Ce qu'il faut remarquer.

De plus, GF étant à FB comme ZM à MB , c'est à dire, comme LK à KM , ou comme EH à HF ; & EI étant à IF comme GF à FB , il s'ensuit que EH est à HF comme EI à IF : Et partant la ligne IH est moyenne Harmonique entre les deux EI & IF .

Davantage, comme GF est à FB , ainsi ZM à MB , c'est à dire, LK à KM ; ou prenant leurs doubles, comme AK à KB , il s'ensuit que AK est à KB , comme GF à FB ; & partant que la ligne FK est parallèle à AE ; & par conséquent les triangles GPE , KHF seront semblables, & leurs bases PE , HF étant égales, les costez GP & HK seront égaux, aussi-bien que EG & FK ; & AE sera à EG , comme à KF , c'est à dire, comme EI à IF , ou GF à FB , ou EH à HF .

Voilà donc trois lignes AG , BG , & EF , divisées en raisons égales aux points E , F , & H : elles seront donc par la 41. du 3. des Coniques d'Apollonius, trois contingentes aux points A , B , & H , d'une même Parabole.

Or pour faire voir que la Parabole, dont les diametres sont OZ & OR , est celle que ces trois lignes touchent aux trois points susdits, je raisonne en cette sorte. La ligne OR étant troisième proportionnelle Géométrique aux deux OZ & AZ , le rectangle ZOR sera égal au carré AZ ou BZ ; & partant les deux points A & B seront dans la Parabole.

Mais pour montrer que le point H y est aussi, je fais ainsi. La ligne FK étant parallèle à AE dans le triangle $AI E$, AI sera à IK , comme EI à IF , c'est à dire, dans le triangle EIL , comme LI à IM ; & en divisant & permutant AK sera à LM , comme KI à IM , c'est à dire, (dans le triangle HIK) comme KH est à FM . Mais nous avons fait remarquer cy-dessus que HK estoit à QX , comme la même AK à LM : Donc la ligne HK aura même raison aux deux lignes QX & FM ; & partant elles seront égales : & étant FX commun, les restes QF & XM , ou VL , seront égaux ; & par conséquent EV aura même raison à QF & à VL . Mais EV est à QF , comme EH est à HF , ou LK à KM , ou AL à LZ : Donc EV sera à VL , comme AL à LZ ; & en changeant & composant VL sera à EL , comme LZ à AZ , ou comme le rectangle ZLA au rectangle ZAL (en prenant AL pour commune hauteur.) Mais EL est à GZ , comme AL à AZ , c'est à dire, (en prenant AZ pour commune hauteur) comme le rectangle ZAL au carré AZ : Donc par égalité VL sera à GZ , comme le rectangle ZLA , ou son égal LKM , au carré AZ ou BZ ; & le double de VL , c'est à dire, HK à GZ , comme le double du rectangle LKM , c'est à dire, LKB au carré BZ ; & HK à la moitié de GZ , c'est à dire, OZ , comme le double du rectangle LKB , c'est à dire, le rectangle AKB au carré BZ . Mais HK est parallèle au diametre OZ : Donc le point H sera dans la Parabole, dont les diametres sont OZ & OR .

Il est notoire que le sommet étant O , où GZ est divisée en deux également, les deux lignes AG & BG toucheront la même Parabole en A & B . Et pour démontrer qu'elle touchera aussi EF en H , je raisonne en cette manière, après avoir tiré la ligne HN parallèle à AB , laquelle sera par conséquent ordonnée au diametre OZ . Parce que FK est parallèle à AE , EI est à IF comme AI à IK , & comme EH à HF , c'est à dire, LK ou ZM à KM ; AI sera donc à IK comme ZM à KM ; & en divisant AK à IK comme KZ à KM : Et partant le rectangle des moyennes IKZ sera égal au rectangle des extrêmes AKM ; & deux fois le rectangle IKZ égal au rectangle AKB ; & ajoutant le carré ZK ,

deux rectangles IKZ avec le carré ZK , (c'est à dire, le rectangle IKZ avec le rectangle IZK) égaux au rectangle AKB avec le carré ZK , (c'est à dire, au carré BZ ;) & partant le rectangle IKZ sera égal au carré BZ , moins le rectangle IZK ; & le rectangle IZK aura même raison au rectangle IKZ qu'au carré BZ , moins le rectangle IZK . Mais le rectangle IZK est au rectangle IKZ comme IZ à IK , c'est à dire, comme PZ à HK : Donc le rectangle IZK sera au carré BZ , moins le rectangle IZK , comme PZ est à HK . Mais il a été démontré cy-dessus, que PG étoit égale à HK ; donc PZ sera à PG comme le rectangle IZK est au carré BZ , moins le rectangle IZK ; & en changeant & composant GZ sera à PZ , comme le carré BZ au rectangle IZK . Mais PZ est à PN , comme IZ à HN ou ZK , c'est à dire, comme le rectangle IZK au carré KZ , ou HN : Donc par égalité GZ sera à PN , comme le carré BZ est au carré NH . Mais parce que NH est parallèle à AB , & ordonnée à GZ , le carré BZ est au carré NH comme la ligne ZO à ON ; il s'enfuit que GZ sera à PN comme ZO à ON ; & en permutant GZ à ZO , comme PN à NO ; mais GZ est double de OZ : donc PN sera aussi double de NO ; & par conséquent la ligne EF touchera la Parabole susdite au point H . Ce qu'il falloit démontrer.

Second Cas du neuvième Probleme.

Figure
III. de
la IV.
Planche.

Si les pieds droits AC & BD estans en surplomb, se rencontrent de la part de A & B au point G , (comme en la 3. Fig. de la 4. Planche,) & que la ligne EF , qui détermine la hauteur de l'arc à décrire étant prolongée, rencontre aussi la ligne de la rampe AB , comme en I , en telle sorte que la raison de la ligne EI à IF soit moindre que celle de la ligne GF à FB .

Après avoir divisé la ligne AB en deux également en Z , & mené indéfiniment la ligne GZ , il faut trouver IH moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux EI & IF ; & après avoir mené les lignes HB & HA , il en faut diviser l'une comme HB en deux également en X , & mener FX , qui rencontrera GZ continuée de la part de Z , comme en Y , ainsi qu'il se verra cy-dessous, d'où il faut mener la ligne EY .

Je dis que la section qui touchera les deux lignes AC & BD en A & B , & la ligne EF , sera une Ellipse, dont Y sera le centre, & le point H celui où elle touchera la ligne EF . Et que si l'on mene indéfiniment la ligne HY , sur laquelle on prenne YT égale à YH , & qu'après avoir tiré la ligne NYM par le point Y parallèle à EF , sur laquelle des points A & B tombent les lignes $A\delta$ & $B\phi$ parallèles à HY , l'on prenne ϵY moyenne proportionnelle Géométrique entre les deux NY & $Y\delta$, & que l'on fasse $Y\beta$ égale à $Y\epsilon$; les deux droites HT , & $\epsilon\beta$ seront les diamètres de même conjugaison de la susdite Ellipse.

Pour la démonstration, il faut premièrement mener des points E , H , & F sur la ligne AB , les lignes $E\mu$, $H\phi$, & $F\eta$ parallèles à GZ , & raisonner en cette manière. La ligne $E\mu$ est à $F\eta$ en raison composée des raisons de $E\mu$ à $A\mu$, (c'est à dire, GZ à AZ) $A\mu$ à $B\eta$, & $B\eta$ à $F\eta$ (c'est à dire, BZ ou AZ à GZ ;) Mais les raisons de GZ à AZ , & AZ à GZ se détruisent, & par conséquent $E\mu$ sera à $F\eta$, comme $A\mu$ à $B\eta$. De plus, parce que la ligne HI est moyenne Harmonique entre les deux EI & IF , comme EI est à IF , ainsi EH est à HF , c'est à dire, $\mu\phi$ à $\phi\eta$, & comme EI à IF ; ainsi $E\mu$ à $F\eta$, c'est à dire, $A\mu$ à $B\eta$; donc $\mu\phi$ est à $\phi\eta$, comme $A\mu$ à $B\eta$; & en composant $A\phi$ à ϕB , comme $A\mu$ à $B\eta$, c'est à dire, comme EI à IF . Mais la raison de EI à IF est par l'Hypothèse moindre que celle de GF à FB , c'est à dire, $Z\eta$ à $B\eta$: Donc la raison de $A\phi$ à ϕB sera moindre que celle de $Z\eta$ à $B\eta$, & en composant & permutant la raison AB à ZB moindre que celle de ϕB à $B\eta$; mais AB est double de ZB : Donc ϕB sera plus grande

grande que le double de $B\eta$, & partant $\phi\eta$ plus grande que $B\eta$; & dans le triangle $H\phi B$, la ligne $H\tau$ fera plus grande que $B\tau$; mais BX est égale à HX : donc la ligne BX fera plus grande que la même $B\tau$, & l'angle BFX plus grand que l'angle $BF\tau$, c'est à dire, BGZ ; Et partant la ligne FX étant continuée, rencontrera la ligne GZ continuée de la part de Z comme au point Y .

Maintenant, après avoir mené par le point Y la ligne KYQ parallèle à AB , & tiré du même point les deux lignes $Y\nu$ & $Y\lambda$ perpendiculaires aux deux BD , AC , je dis que la ligne KQ étant parallèle à AB , elle sera divisée en Y comme AB l'est en Z , c'est à dire, en deux également: Et partant les deux triangles $G Y K$, $G Y Q$ seront égaux; & par conséquent ils auront leurs costez en raison réciproque de leurs hauteurs, c'est à dire, que le costé KG du triangle $G K Y$ sera au costé QG du triangle $G Q Y$, comme la ligne $Y\nu$ hauteur du triangle $G Q Y$ à la ligne $Y\lambda$ hauteur du triangle $G K Y$: Mais comme KG est à QG , ainsi AG est à BG : Donc AG fera à BG comme $Y\nu$ à $Y\lambda$.

De plus, après avoir mené les deux lignes AY & BY , d'autant que les deux triangles AYE , BYF sont entre eux en raison composée de leurs costez & de leurs hauteurs, la raison du triangle AYE au triangle BYF sera composée des raisons des lignes AE à BF , & $Y\lambda$ à $Y\nu$, c'est à dire, BG à AG . Mais la raison de AE à BF est encore composée de celle des lignes AE à $E\mu$ (c'est à dire, AG à GZ) $E\mu$ à $F\eta$, & $F\eta$ à BF , (c'est à dire, GZ à GB ;) la raison donc du triangle AYE au triangle BYF sera composée des raisons de AG à GZ , $E\mu$ à $F\eta$, GZ à GB , & GB à AG ; mais les raisons de AG à GZ , GZ à GB , & GB à AG se détruisent. Il ne reste donc plus que la raison de $E\mu$ à $F\eta$ qui soit égale à celle du triangle AYE au triangle BYF . Mais comme $E\mu$ est à $F\eta$, ainsi EI à IF , ou EH à HF , ou le triangle EYH au triangle FYH : Donc le triangle AYE sera au triangle BYF , comme le triangle EYH à HYF ; & en permutant, le triangle AYE au triangle EYH , comme le triangle BYF au triangle HYF . Mais les deux triangles AYE , EYH ayans une base commune EY , sont entre eux comme les lignes AV & VH ; & les deux triangles BYF , HYF ayans une base commune FY , sont aussi comme BX à XH , il s'ensuit que AV est à VH comme BX à XH . Mais BX est égale à XH par la construction: Donc AV sera aussi égale à VH .

Voilà donc trois lignes AB , AH , & BH qui sont divisées également en deux aux points Z , V , & X , par les lignes GZ , EV , & FX , qui partent des points G , E , & F , où les lignes AC , BD , & EF se rencontrent, & qui se joignent toutes en un même point Y , au dessous du point G vers Z . Et partant ce point Y sera le centre d'une Ellipse, qui touchera les trois lignes susdites AC , BD , & EF , aux points A , B , & H .

Il faut maintenant faire voir que les deux lignes HYT , $\epsilon Y\beta$ en sont les diametres de même conjugaison. Et pour cet effet, il faut continuer la ligne HYT de part & d'autre, jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne AC prolongée en χ , & BD en ζ ; puis du point E mener la ligne $E\varsigma$ parallèle à AH , & qui coupe la ligne HY prolongée en ς , d'où par le point V il en faut mener une autre ςV_3 qui coupe la ligne AC en 3 , & joindre les points Y & 3 . Semblablement du point F il faut mener FL parallèle à BH , & qui coupe la même YH prolongée en L , d'où par le point X il faut tirer une ligne LXO , qui rencontre BD prolongée en O , & joindre les points Y & O , & enfin tirer les lignes $A\downarrow$ & BS parallèles à EF , & continuer MN de part & d'autre, afin qu'elle coupe les lignes HB , HA prolongées aux points 7 & 6 , & tirer la ligne VX indéfiniment de part & d'autre, afin qu'elle coupe EI au point 9 & MN au point 8 .

Cela fait, je raisonne en cette manière. D'autant que LF est parallèle à BH , & BX est égale à HX , la ligne LF sera à HX , c'est à dire, LY à YH , comme la même LF à BX , c'est à dire, comme LO à OX ; & par conversion de rai-

fon LY fera à LH comme LO à LX; Et partant dans le triangle LY O, la base OY fera parallele à la ligne HX ou LF: Donc au triangle YZO, la ligne YO fera à LF comme ζY à ζL ; & aux triangles semblables YXO, LXF, la mesme YO fera à la mesme LF comme YX à XF, ou comme YH à HL: Et partant ζY fera à ζL comme YH à HL; & en permutant, ζY à HY comme ζL à HL; Mais ζY est à HY comme ζM à MF, & ζL à HL comme ζF à FB: Donc ζM est à MF comme ζF à FB; & en permutant, & par conversion de raison ζM est à MF comme MF à MB. Mais comme ζM est à MF, ainsi ζY est à HY, & MF est à MB, ainsi HY à YS: Donc ζY est à HY comme H.Y à YS, c'est à dire, que HY est moyenne Géometrique entre les deux ζY & YS: Mais la ligne YT est égale à YH par la construction; Et partant la toute ζT est divisée Harmoniquement aux points H & S, & la ligne ζS est moyenne Harmonique entre les deux ζT & ζH , & la ligne ζY moyenne Arithmetique entre les mesmes.

Par mesme raisonnement, & par le moyen de la ligne EY nous démontrerons que la ligne HY est aussi moyenne Géometrique entre les deux χY & Y ψ : & que la toute T χ est aussi divisée Harmoniquement aux points H & ψ , en sorte que la ligne $\chi\psi$ est moyenne Harmonique entre les deux T χ & H χ , & la ligne χY moyenne Arithmetique entre les mesmes.

D'où il appert que les rectangles $\chi Y\psi$ & ζYS estans chacun égal au carré HY, ils seront aussi égaux entre eux, & ils auront l'un & l'autre mesme raison au carré ϵY , ou son égal Y β . Mais la raison du rectangle $\chi Y\psi$ au carré ϵY , ou son égal NY α , est composée des raisons des lignes χY à NY (c'est à dire, A α à N α) & de Y ψ , ou son égale A δ à Y δ , lesquelles font ensemble la raison du carré A δ au rectangle N δY : Donc le rectangle $\chi Y\psi$, ou le carré HY fera au carré ϵY , comme le carré A δ au rectangle N δY : Or est-il que le rectangle N δY est égal au rectangle $\epsilon\delta\beta$, comme il a esté tant de fois démontré cy-dessus: Et partant le carré A δ sera au rectangle $\epsilon\delta\beta$ comme le carré HY au carré ϵY , ou prenant leurs quadruples, comme le carré du diametre HT au carré du diametre $\epsilon\beta$. Mais la ligne A α estant parallele au diametre HY, est ordonnée à l'autre diametre $\epsilon\beta$: Donc le point A fera dans l'Ellipse, dont les deux lignes HT, & $\epsilon\beta$ sont les diametres de mesme conjugaison.

Il est notoire que le point H estant au bout d'un desdits diametres, il est aussi dans la mesme Ellipse. Mais pour prouver que le point B s'y trouve pareillement, il faut discourir en cette manière. Le rectangle ζYS est au rectangle MYP en raison composée des raisons de ζY à YM, c'est à dire, BP à PM, & de YS, ou son égale BP à YP, lesquelles composent la raison du carré BP au rectangle MPY: Et partant le rectangle ζYS , ou son égal le carré HY fera au rectangle MYP, ou son égal le carré Y β , ou Y ϵ (comme nous le démontrerons cy-dessous) comme le carré BP est au rectangle MPY, ou à son égal $\beta P\epsilon$ (comme nous le démontrerons aussi cy-dessous,) c'est à dire, que le carré BP fera au rectangle $\beta P\epsilon$ comme le carré HY au carré Y ϵ ; ou prenant leurs quadruples, comme le carré TH au carré $\epsilon\beta$: Mais BP estant parallele au diametre TH, est ordonnée à l'autre diametre $\epsilon\beta$: Et partant le point B est dans l'Ellipse, dont les lignes HT & $\epsilon\beta$ sont diametres de mesme conjugaison.

Je dis de plus que cette Ellipse touchera les lignes AC, BD, & EF aux mesmes points A, B, & H: ce qui est premièrement constant par la 6. du 2. des Coniques au regard de la ligne EF, qui est menée au bout H du diametre TH parallele à l'autre diametre $\epsilon\beta$. Mais pour les deux autres, il faut raisonner en cette sorte. Dautant que la ligne BS est parallele à $\epsilon\beta$, elle fera ordonnée à TH; mais elle divise la ligne T ζ de telle sorte en S, que la ligne ζS soit moyenne Harmonique entre les deux ζT & ζH . Il s'enfuit par la 34. du 1. des Coniques, que la ligne BD touchera en B la susdite Ellipse.

De plus, par la même proposition, il appert que la ligne AC la touche en A, parce que l'ordonnée $A\psi$ coupe $T\chi$ en ψ , de telle sorte que $\chi\psi$ soit moyenne Harmonique entre les deux χT & χH .

Nous avons donc trouvé le point Y pour centre, & les deux lignes HT & $\epsilon\beta$ pour diamètres de même conjugaison d'une Ellipse, laquelle touche les trois lignes AC, BD, & EF aux points A, B, & H. Ce qu'il falloit faire.

Il ne reste plus qu'à démontrer (comme nous l'avons promis) que le rectangle MYP est égal au carré $Y\beta$ ou $Y\epsilon$, c'est à dire, au rectangle NY α , & le rectangle MPY égal au rectangle $\epsilon P\beta$; ce qui se fait en cette manière, après avoir fait $I\theta$ égale à IF. Puisque AV est égale à VH, comme BX égale à XH; la ligne VX ρ sera parallèle à AB, & H ρ égale à I ρ . Et puis que EH est à HF comme EI à IF, en composant, & permutant, E θ sera à EF comme IF à HF. Mais comme IF à HF, ainsi EI à EH: Donc E θ sera à EF, comme EI à EH; & en divisant, prenant la moitié des antécédens, composant, & par conversion de raison, EI sera à IF, c'est à dire, EH à HF comme E ρ à H ρ ; & en permutant, changeant, & par conversion de raison E ρ sera à H ρ comme H ρ à F ρ .

Or dans les triangles semblables HX ρ & 7X8, comme H ρ est à F ρ , ainsi 78 est à Y8: Et dans les triangles semblables EV ρ , YV8, comme E ρ est à H ρ , ainsi Y8 est à 68: Donc 78 sera à Y8 comme Y8 à 86, & en la même raison de E ρ à H ρ . Mais comme E ρ à H ρ , ainsi EH à HF, c'est à dire, 2Y à YR; & comme 78 à Y8, ainsi 7Y à Y6: Donc 7Y est à Y6 comme 2Y est à YR; & le rectangle des extrêmes 7YR est égal au rectangle des moyennes 6Y2.

De plus, parce que ζY est à HY comme HY à SY, par conversion de raison ζY sera à ζH comme HY à HS: Mais comme ζY est à ζH , ainsi MY est à HF, ou YR; & comme HY à HS, ainsi 7Y est à BS ou YP: Donc MY sera à YR comme 7Y à YP; & le rectangle des moyennes 7YR est égal à celui des extrêmes MYP.

Par le même raisonnement nous ferons voir que le rectangle 6Y2 est égal au rectangle NY α . Et partant le rectangle 7YR est au rectangle MYP comme 6Y2 à NY α ; & en permutant 7YR étant égal à 6Y2, le rectangle MYP sera aussi égal au rectangle NY α , c'est à dire, par la construction, au carré ϵY ou βY . Et partant si de l'un & de l'autre on ôte le commun carré YP, le rectangle MPY demeurera égal au rectangle $\epsilon P\beta$. Qui est ce qu'il falloit démontrer.

Le cercle pourroit résoudre ce Cas de ce Probleme, ainsi que nous avons dit cy-dessus du 8^e, si les deux lignes AG & BG se trouvant égales aussi-bien que les trois AY, BY, & HY; ces trois lignes se trouvoient encore perpendiculaires aux trois AC, BD, & EF, chacune à la sienne.

Troisième Cas du neuvième Probleme.

ENFIN, si les pieds droits AC & BD estans en surplomb, se rencontrent, estans prolongez de la part de A & B, au point G (comme en la 4. Figure de la 4. Planche) & que la ligne EF, qui détermine la hauteur de l'Arc à décrire, rencontre aussi la ligne de la rampe AB, comme en I, de telle sorte que la raison de la ligne EI à IF soit plus grande que celle de FG à FB. Après avoir divisé la ligne AB en deux également en Z, & mené la ligne GZ indéfiniment de la part de G; il faut trouver IH moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux EI & IF; & après avoir mené les lignes HB, HA, il en faut diviser l'une, comme HB, en deux également en X, & mener FX indéfiniment de la part de F, qui rencontrera GZ au dessus du point G comme en Y (ainsi qu'il se verra cy-dessous) d'où il faut mener YEV.

Figure
I V. de
la I V.
Planche.

Je dis que la section qui touchera les deux lignes AC & BD aux points A & B, & la ligne EF; fera une Hyperbole, dont le centre sera au point Y; & le point H celui où elle touchera la ligne EF; & que si l'on mene indéfiniment la ligne HY, sur laquelle on prenne YT égale à YH; & qu'après avoir tiré par le point Y la ligne MN parallèle à EF, sur laquelle des points A & B tombent les lignes AN & BP parallèles à HY; l'on prenne ϵ Y moyenne proportionnelle Géométrique entre les deux NY & YN, & que l'on fasse Y β égale à ϵ Y: les deux droites HT & $\epsilon\beta$ seront les diamètres de même conjugaison de la susdite Hyperbole.

La démonstration s'en fait en la même manière, & presque aux mêmes termes que celle de la précédente proposition pour l'Ellipse; & pour ce sujet, il faut premièrement mener des points E, H, & F sur la ligne AB les lignes E μ , H ϕ , & F η parallèles à GZ, & argumenter en cette sorte. La ligne E μ est à F η en raison composée de celles de E μ à A μ , (ou GZ à AZ,) A μ à B η , & B η à F η , (ou BZ, ou AZ à GZ.) Mais la raison de GZ à AZ détruit celle de AZ à GZ; & partant la raison de E μ à F η sera égale à celle de A μ à B η . De plus, parce que IH est moyenne Harmonique entre les deux EI & IF; la ligne EH sera à HF, ou $\mu\phi$ à $\phi\eta$, comme EI à IF, ou E μ à F η , ou A μ à B η : Donc A μ sera à B η comme $\mu\phi$ à $\phi\eta$; & la toute A ϕ à la toute ϕ B comme la partie $\mu\phi$ à la partie $\phi\eta$, c'est à dire comme EI à IF. Mais la raison de EI à IF est par l'hypothèse plus grande que celle de GF à FB, ou Z η à B η : Donc la raison de A ϕ à B ϕ sera plus grande que celle de Z η à B η ; & en composant & permutant, celle de AB à ZB plus grande que celle de ϕ B à B η . Mais AB est double de ZB: Donc ϕ B sera moindre que double de B η ; c'est à dire, que $\phi\eta$ sera moindre que η B; & dans le triangle H ϕ B, H τ sera moindre que τ B; & partant τ B plus grande que BX, & l'angle BF τ , ou BGZ plus grand que l'angle BF χ , ou GFY: Et partant la ligne XF rencontrera la ligne ZG continuée au dessus de G, comme au point Y.

Maintenant, après avoir mené par le point Y la ligne KYQ parallèle à AB, & tiré du même point les deux lignes Y ν & Y λ perpendiculaires aux deux lignes ACG, & BDG prolongées; je dis que la ligne KQ étant parallèle à AB, elle sera divisée en Y en la même raison que AB l'est en Z, c'est à dire en deux également: Et partant les triangles GYK, GYQ seront égaux; & ils auront par conséquent les costez reciproques de leurs hauteurs, c'est à dire, que le costé GK du triangle GKY sera au costé GQ du triangle GQY, comme Y ν hauteur de GQY à Y λ hauteur de GKY; Mais comme KG est à GQ, ainsi AG est à GB: Donc AG est à GB comme Y ν est à Y λ .

De plus, après avoir mené les deux lignes AY & BY; d'autant que les deux triangles AYE, BYF sont entre eux en raison composée de celles de leurs costez, & de leurs hauteurs; le triangle AYE sera à BYF en raison composée du costé AE au costé BF, & de la hauteur Y λ à la hauteur Y ν , c'est à dire, de la ligne BG à AG. Mais la raison de AE à BF est encore composée de celles de AE à E μ , (ou AG à GZ,) E μ à F η , & F η à FB, (ou GZ à GB:) Donc la raison du triangle AYE au triangle BYF sera composée de celles de AG à GZ, E μ à F η , GZ à GB, & GB à AG. Mais les raisons de AG à GZ, GZ à GB, & GB à AG se détruisent: Donc le triangle AYE sera à BYF comme la ligne E μ est à F η , ou comme EI à IF, ou EH à HF, ou enfin comme le triangle EYH au triangle FYH; & en permutant le triangle AYE sera au triangle BYF comme le triangle EYH au triangle FYH. Mais parce que les deux triangles AYE, BYF sont entre eux comme AV est à VH, aussi-bien que les deux triangles AEV, EVH, les restes, sçavoir les triangles EYH, EHY seront aussi entre eux comme AV est à VH. Par même raison nous montrerons que le triangle BYF est au triangle FHY comme BX est à XH: Donc AV sera

fera à VH comme BX est à XH ; mais celles-cy sont égales par la construction, & partant AV sera aussi égale à VH .

Voilà donc trois lignes AB , AH , & BH ; qui sont divisées en deux également aux points Z , V , & X par les lignes GZ , EV , FX , qui partant des points G , E , & F , où les lignes AC , BD , & EF se rencontrent, se joignent toutes au dessus de G en un même point Y : Donc le point Y sera le centre d'une Hyperbole qui touchera les susdites trois lignes AC , BD , & EF aux points A , B , & H .

Il faut maintenant faire voir que les deux lignes HT & $\epsilon\beta$ en sont les diamètres de même conjugaison. Et pour ce sujet il faut continuer la ligne YH , qui rencontrera AC prolongée au point χ , & BD en ζ ; puis du point F mener FL parallèle à BH , & qui coupe YH en L , par où du point X il faut mener la ligne XL , & la continuer jusqu'à ce qu'elle coupe BG prolongée en O , & joindre les points Y & O . En la même manière du point E il faut mener $E\gamma$, parallèle à AH , qui rencontre YH en γ , par où du point V il faut tirer la ligne $V\gamma$, & la continuer jusqu'à ce qu'elle rencontre AG continuée au point 3 , & joindre Y & 3 ; & enfin mener $A\psi$, & BS parallèles à EF ou MN , & continuer MN de part & d'autre jusqu'à ce qu'elle coupe les lignes AH , BH prolongées aux points 6 & 7 , & tirer la ligne VX , en sorte qu'elle coupe EI au point 9 , & MN au point 8 .

Cela fait, je raisonne en cette manière. Parce que HX est égale à BX , la ligne LF aura même raison à l'une & l'autre; c'est à dire, qu'au triangle HYX , la ligne LF sera à HX comme LY à YH ; & au triangle XOB , LF sera à BX comme LO à OX ; & partant LY sera à YH comme LO à OX ; & en divisant & permutant, LY à LO comme LH à LX : Donc les triangles OLY , HLX seront semblables, & la base OY parallèle à HX ou LF . Et par conséquent aux triangles semblables OZY , LZF , la ligne OY est à LF comme YZ à ZL ; & dans les triangles semblables OXY , LXF , la même OY est à la même LF comme OX à XL ; & partant ZY est à ZL comme OX à XL , c'est à dire, comme YH à HL ; & en permutant, ZY est à YH comme ZL à HL ; Mais comme ZY à YH , ainsi ZM à MF , & comme ZL à HL , ainsi ZF à FB : Donc ZM est à MF comme ZF à FB ; & en permutant, changeant, composant, & changeant ZM sera à MF , (c'est à dire, ZY à YH), comme MF à MB , c'est à dire, YH à YS . Voilà donc la ligne YH moyenne Géométrique entre les deux ZY & YS ; mais la ligne YT a été prise égale à la même YH : Donc la toute TS sera divisée Harmoniquement aux points H & ζ ; & la ligne ζS sera moyenne Harmonique entre les deux TS & SH ; & SY moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Par même raisonnement, & par le moyen de la ligne $E\gamma$ nous démontrerons que la même YH sera aussi moyenne Géométrique entre les deux χY & ψY ; & que la toute $T\psi$ est divisée Harmoniquement aux deux points H & χ , & la ligne $\psi\chi$ moyenne Harmonique entre les deux $T\psi$ & ψH ; & ψY moyenne Arithmétique entre les mêmes.

D'où il appert que les rectangles $\chi Y\psi$ & ζYS estans chacun égal au carré HY , ils seront aussi égaux entre eux; & le carré HY sera au carré ϵY , ou à son égal le rectangle $NY\eta$, comme le rectangle $\chi Y\psi$ au même rectangle $NY\eta$. Mais la raison du rectangle $\chi Y\psi$ au rectangle $NY\eta$ est composée de celles des lignes χY à NY , c'est à dire, $\chi\psi$ à $A\psi$, & ψY à $Y\eta$, ou à son égale $A\psi$; qui composent la raison du rectangle $\chi Y\psi$ au carré $A\psi$: Donc le carré YH sera au carré ϵY , ou (prenant leurs quadruples,) le carré du diamètre TH sera au carré du diamètre $\epsilon\beta$, comme le rectangle $\chi\psi Y$ au carré $A\psi$. Mais le rectangle $\chi\psi Y$ est égal au rectangle $T\psi H$ (comme nous le démontrerons cy-dessous.) Et partant le rectangle $T\psi H$ est au carré $A\psi$, comme le carré TH au carré $\epsilon\beta$. Et comme la ligne $A\psi$ est parallèle à MN ou $\epsilon\beta$, elle est ordonnée au diamètre TH : Et partant le point A est dans l'Hyperbole dont TH & $\epsilon\beta$ sont diamètres de même conjugaison.

Il est constant que le point H estant au bout d'un des diametres susdits, il est aussi dans la mesme Hyperbole. Mais pour prouver que le point B s'y trouve aussi, il faut discourir de cette sorte. Le rectangle $\zeta Y S$ est au rectangle $M Y P$, en raison composée de celles des lignes ζY à $M Y$, (ou ζS à $B S$), & $Y S$ à $Y P$, ou $B S$; lesquelles composent aussi la raison du rectangle $\zeta S Y$ au carré $B S$: Et partant le rectangle $\zeta Y S$, ou son égal le carré $Y H$ sera au rectangle $M Y P$, ou son égal le carré ϵY (comme nous le démontrerons cy-dessous,) comme le rectangle $\zeta S Y$ au carré $B S$. Mais nous ferons aussi voir cy-dessous, que le rectangle $\zeta S Y$ est égal au rectangle $T S H$; Et partant comme le carré $Y H$ au carré ϵY , ou (prenant leurs quadruples,) comme le carré du diametre $T H$ au carré du diametre $\epsilon \beta$, ainsi est le rectangle $T S H$ au carré $B S$: Mais la mesme $B S$ estant parallele à $\epsilon \beta$, est ordonnée à $T H$: Donc le point B est aussi dans l'Hyperbole, dont les deux droites $T H$ & $\epsilon \beta$ sont diametres de mesme conjugaison.

Je dis de plus, que cette Hyperbole touchera les lignes $A C$, $B D$, & $E F$ aux points A , B , & H . Ce qui est premièrement constant pour le point H , par la 6. du 2. des Coniques, la ligne $E F$ estant menée au bout d'un des diametres $H T$, & parallele à l'autre $\epsilon \beta$. Mais pour les deux autres points, je le démontre en cette manière.

D'autant que la ligne $A \psi$ ordonnée au diametre $T H$, le coupe en ψ de telle sorte que $\chi \psi$ soit moyenne Harmonique entre les deux $T \psi$ & $H \psi$; la ligne $A C \chi$ touchera la susdite Hyperbole au point A par la 34. du 1. des Coniques d'Apolonius. Et par la mesme proposition, & le mesme raisonnement, la ligne $B D \zeta$ touchera la mesme Hyperbole au point B , d'où la ligne $B S$ est ordonnée au diametre $T H$, & le coupe au point S , en telle sorte que la ligne ζS soit moyenne Harmonique entre les deux $T S$ & $S H$.

Nous avons donc trouvé le point Y pour centre, & les deux lignes $T H$, & $\epsilon \beta$ pour diametres de mesme conjugaison d'une Hyperbole, qui touchera les trois lignes $A C$, $B D$, & $E F$ aux points A , B , & H . Ce qu'il falloit faire.

Il faut maintenant démontrer que le rectangle $\chi \psi Y$ est égal au rectangle $T \psi H$, ce qui se fait ainsi. Parce que ψY est à $Y H$, ou $T Y$, comme $T Y$ à $Y \chi$; en composant, & par conversion de raison $T \psi$ fera à ψY comme χT à $T Y$, ou $H Y$; & en permutant, & par conversion de raison $T \psi$ fera à $\psi \chi$ comme ψY à ψH : Et partant le rectangle des moyennes $\chi \psi Y$ sera égal à celui des extrêmes $T \psi H$.

Par mesme raisonnement, on peut voir que le rectangle $\zeta S Y$ est aussi égal au rectangle $T S H$. De sorte qu'il ne reste plus qu'à montrer, que le rectangle $M Y P$ est égal au carré $Y \beta$, ou ϵY , c'est à dire, au rectangle $N Y \alpha$. Ce qui se fait en cette manière. Parce qu'il a esté démontré cy-dessus dans la précédente proposition, que la ligne $E \theta$ estoit à $H \theta$ comme $H \theta$ est à $F \theta$; & que dans les triangles semblables $H X \theta$, $7 X 8$, la ligne $H \theta$ est à $F \theta$ comme $7 8$ est à $8 Y$; & dans les triangles semblables $E V \theta$, $Y V 8$, la ligne $E \theta$ est à $H \theta$ comme $8 Y$ est à $8 6$: Il s'ensuit que $7 8$ est à $8 Y$ comme $8 Y$ est à $8 6$, & en la mesme raison de $E \theta$ à $H \theta$, c'est à dire, de $E H$ à $H F$, ou de $2 Y$ à $Y R$. Mais comme $7 8$ est à $8 Y$, ainsi $7 Y$ à $Y 6$: Donc $7 Y$ fera à $Y 6$ comme $2 Y$ à $Y R$; & le rectangle des extrêmes $7 Y R$ sera égal à celui des moyennes $6 Y 2$.

Maintenant, comme ζY est à $H Y$, ainsi $H Y$ à $Y S$; en divisant ζY fera à ζH comme $H Y$ à $H S$. Mais comme ζY à ζH , ainsi $M Y$ à $F H$, ou son égale $Y R$; & comme $H Y$ à $H S$, ainsi $7 Y$ à $B S$, ou son égale $Y P$: Donc $M Y$ fera à $Y R$ comme $7 Y$ à $Y P$; & le rectangle des moyennes $7 Y R$ sera égal à celui des extrêmes $M Y P$.

Par mesme discours on fera voir que le rectangle $6 Y 2$ sera égal au rectangle $N Y \alpha$. Et partant le rectangle $7 Y R$ est à $M Y P$ comme $6 Y 2$ à $N Y \alpha$; & en permutant comme le rectangle $7 Y R$ est égal au rectangle $6 Y 2$, ainsi $M Y P$ sera égal à $N Y \alpha$, ou au carré ϵY , ou βY . Ce qu'il falloit démontrer.

TROISIÈME OBSERVATION.

DANS les neuf Problemes cy-dessus, la difficulté de la préparation dont nous avons parlé au commencement de ces Discours est comprise, & de ce qu'il faut faire avant que l'on puisse se servir du Probleme de Pappus ; c'est à dire, de trouver les diamètres de même conjugaison de la section qui doit toucher les lignes des pieds droits aux points donnez.

Mais parce que, sans parler de la ligne qui détermine la hauteur, on pourroit proposer un Arc à décrire, qui passant par un point donné, toucheroit deux pieds droits en deux autres points aussi donnez ; & qu'en ce cas les Ouvriers se pourroient trouver embarrassés, qui ne sçauroient pas que l'on pût facilement, par ce point donné, mener cette ligne que nous avons supposée dans les propositions cy-dessus, pour déterminer la hauteur de l'Arc à décrire, & avec cet avantage, que ce sera en ce même point que se fera l'attouchement de l'Arc & de la Ligne susdite.

Il m'a semblé à propos de le faire voir, & d'en donner les pratiques dans ce Discours, par une proposition universelle, en cette sorte.

PROBLEME.

Ayant à décrire un Arc rampant par un point donné, & entre deux pieds droits, qu'il touche en deux autres points aussi donnez. Trouver la ligne droite, qui détermine la hauteur de l'Arc ; c'est à dire, la ligne qui doit toucher l'Arc au susdit premier point donné.

LES deux pieds droits (dans les 9. Figures de la 5. Planche) soient A C, & B D, Fig. IX. de la V. Planche. parallèles, ou non parallèles, & le point donné H, par lequel il faut décrire un Arc rampant, qui touche A C en A, & B D en B. Qu'il faille trouver la ligne E H F, qui détermine la hauteur de cet Arc, en sorte qu'il la touche au même point H.

Après avoir tiré la ligne de la rampe A B, & continué les pieds droits A C & B D, en sorte qu'ils se rencontrent au point G, s'ils ne sont point parallèles ; il faut de l'un des points A ou B, par le point H, tirer une droite comme B H, & alors.

PREMIÈRE PROPOSITION.

SI les pieds droits sont parallèles (comme aux Figures 1. & 2. de la 5. Planche) la ligne B H rencontrera l'autre pied droit A C prolongé au point K ; auquel cas il faut diviser la ligne A K en deux également en E, & mener par le point H la droite E H F, qui sera celle que l'on cherche ; parce que, ou elle sera parallèle à la rampe A B, (comme en la 1. Figure) ou elle la rencontrera, étant prolongée comme en I, (en la 2. Figure.)

Premier Cas.

Puis que dans le triangle A K B (Figure 1. de la 5. Planche) la ligne E H a été menée parallèle à la base A B, le côté A K fera à K E comme A B est à E H ;

Mais AK a esté faite double de KE; & partant la ligne AB, ou son égale EF, sera aussi double de la même EH; & la section, qui passant sur le point H, touchera les deux lignes droites AC, & BD aux points A & B; touchera aussi la ligne EF au même point H; & cecy tombe dans la solution du 4. Probleme cy-dessus.

Second Cas.

Fig. II. de la V. Planche. C'EST à dire, lors que la ligne EF (Figure 2. de la 5. Planche) rencontre la ligne AB prolongée en I; parce que les deux lignes AE, & EK sont égales, elles auront même raison à la ligne BF; qui leur étant parallèles, il s'en suivra qu'aux triangles EKH, BHF, la ligne EK fera à BF, c'est à dire, EH à HF, comme dans le triangle AIE, la ligne AE à la même BF, c'est à dire, EI à IF: Et partant la ligne EI se trouvera coupée Harmoniquement aux deux points H & F, & la ligne IH sera la moyenne Harmonique entre les deux extrêmes EI & IF: Et par conséquent la section, qui passant par le point H, touchera les pieds droits AC en A, & BD en B, touchera aussi la ligne EF au même point H: Et cecy tombe dans la solution du 5. Probl.

SECONDE PROPOSITION.

Figures III. IV. de la V. Planche. Si les pieds droits estans en talu, se rencontrent en G au dessous de la rampe AB (Figures 3. & 4. de la 5. Planche;) & la ligne tirée du point B par H est parallèle à l'autre pied droit AC; il ne faut que prendre sur GA prolongée une ligne AE égale à AG, & mener la ligne EHF, qui sera parallèle à la rampe AB (comme en la 3. Figure,) ou bien elle la rencontrera, comme en I. (en la 4. Figure.)

Premier Cas.

Fig. III. de la V. Planche. Au premier Cas (Figure 3. de la 5. Planche,) parce que dans le triangle EGF, la ligne AB est supposée parallèle à la base EF; la ligne GA fera à AE comme GB à BF; Et parce que dans le même triangle EFG, la ligne BH est parallèle à la base EG; la ligne GB fera à BF comme EH est à HF; Et partant, par égalité, la ligne GA fera à AE comme EH à HF; mais GA est égale à AE: Donc EF sera divisée en deux également en H; Et comme elle est parallèle à la rampe AB, la section, qui passant par le point H, touchera les pieds droits AC en A, & BD en B, touchera aussi la même EF en H. Et cecy tombe dans la solution du 6. Probl.

Second Cas.

Fig. IV. de la V. Planche. Au second Cas, c'est à dire, lors que la ligne EF étant prolongée, rencontre la rampe AB, comme en I; (Figure 4. de la 5. Planche,) il faut discourir en cette manière, après avoir mené par le point E la ligne OEP parallèle au costé BD, & qui rencontre la rampe en O, & la ligne BH prolongée en P. Parce que les triangles AEO, AGB sont semblables, à cause des parallèles EO, & BG, & des angles au sommet A; ils seront aussi égaux, à cause de l'égalité des costez AE, & AG; & partant les autres costez EO, & BG seront aussi égaux: Mais BG est égale à EP, étant parallèles, & entre parallèles: Donc EO fera égal à EP; & EO fera à BF, (c'est à dire, dans le triangle EIO, la ligne EI à IF,) comme EP à la même BF, c'est à dire, dans les triangles semblables EHP, BHF, comme la ligne EH à HF: Et partant la ligne EI sera divisée Harmoniquement aux deux points H & F, & la ligne IH sera moyenne Harmonique entre les deux extrêmes

mes E I & I F : Et par conséquent la section, qui passant par le point H, touchera les pieds droits A C en A, & B D en B, touchera aussi la même E F au point H. Et cecy tombe dans la solution du 8. Probl.

TROISIÈME PROPOSITION.

Si les pieds droits étant en talu & se rencontrant en G au dessous de la rampe A B, la ligne tirée du point B par le point donné H, coupe le costé A C prolongé en K; (Figures 5. & 6. de la 5. Planche,) il faut premièrement couper la ligne A K en deux également au point L, par lequel il faut mener L M parallèle à B K & égale à A L ou L K; & du point G par M tirer la droite G M jusqu'en N, où elle rencontrera la ligne B K prolongée; puis faire K E égale à K N, & du point E par H mener la ligne E H F, & raisonner en cette manière. Comme au triangle K G N, la ligne L M est parallèle à la base K N; la même L M fera à K N, c'est à dire, A L à K E, comme G L à G K; & prenant les doubles des antécédens, A K fera à K E comme A G & G K ensemble à G K; & en divisant A E fera à K E comme A G à G K; & en permutant, & changeant G K fera à K E comme A G à A E; & la route G K sera divisée Harmoniquement aux deux points E & A, en sorte que la ligne A K soit la moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux extrêmes G K & K E.

Maintenant, ou la ligne tirée du point E par H, sera parallèle à la rampe A B, (comme en la 5. Figure,) ou elle la rencontrera, comme en I, (en la 6. Figure.)

Premier Cas.

Au premier Cas (Figure 5. de la 5. Planche:) Après avoir mené par le point E la ligne O P parallèle au pied droit B D, & rencontrant la rampe en O, & la ligne B H prolongée en P; je dis que la ligne E P dans le triangle G K B, ayant été tirée parallèle à la base G B, le costé G K sera à K E comme G B à E P; & dans les deux triangles semblables G A B, E A O, la ligne G A sera à A E comme la même G B est à E O. Mais parce que G K est à K E comme G A est à A E; il s'ensuit que G B sera à P E comme la même G B est à E O; & que les deux lignes E P & E O ou B F seront égales; & que dans les triangles semblables E H P, B H F, les deux costez E H & E F seront égaux; & la ligne E F sera divisée en deux également en H; & comme elle est parallèle à la rampe A B, la Section qui passant par le point H, touchera les deux pieds droits A C & B D en A & B, touchera aussi la ligne E F en H. Et cecy tombe dans la solution du 6. Probl.

Second Cas.

Au second Cas (Figure 6. de la 5. Planche;) c'est à dire, lors que la ligne E F rencontre la ligne A B prolongée comme en I: Après avoir comme dessus mené la ligne O E P parallèle au pied droit B D, & coupant les lignes A B en O, & B H en P; je dis que dans le triangle G K B, la ligne E P ayant été menée parallèle à la base G B; la ligne G K sera à K E comme G B à E P; mais celle-cy est composée des raisons de G B à B F, & de B F à E P, c'est à dire, F H à H E: il s'ensuit que la raison de G K à K E sera égale aux raisons de G B à B F, & de F H à H E. De plus, les triangles G A B, E A O étant semblables, aussi-bien que B I F, O I E; la ligne G A sera à A E, comme G B est à E O, c'est à dire, en raison composée de G B à B F, & de B F à E O, c'est à dire, F I à E I. Mais il a été démontré que la raison de G K à K E étoit égale à celle de G A à A E: Donc la raison composée de G B à B F, & de F H à H E sera égale à celle de la même G B à B F, & de F I à I E: étant donc la raison commune de G B à B F, la raison

A a

de FI à IE sera égale à celle de FH à HE; & la ligne IF sera divisée Harmoniquement aux deux points E & H, & la ligne IH sera la moyenne Harmonique entre les deux extrêmes IF & IE: Et par conséquent la Section, qui passant par le point H touchera les deux pieds droits AC en A & BD en B, touchera aussi la ligne EF en H. Et ceci tombe dans la solution du 8. Probleme.

QUATRIÈME PROPOSITION.

Fig. VII. Si les pieds droits, étant en surplomb, se rencontrent au dessus de la rampe au point G (comme aux Figures 7. 8. & 9. de la 5. Planche;) il faudra du point B par H mener indéfiniment une droite BH, qui coupe l'autre pied droit AC en K; & après avoir divisé la ligne AK en deux également en L, & mené LM parallèle à BH, & égale à AL; il faut joindre les deux points GM par une droite, qui coupe la même BH prolongée en N, & faire KE égale à KN; & par le point E tirer OP parallèle à BD, & rencontrant les lignes AB & BH en O & P. Ensuite nous dirons que LM étant parallèle à KN, LG est à GK comme LM est à KN, c'est à dire, AL à KE; & prenant les doubles des antecédens AG & GK ensemble seront à GK comme AK à KE; & en divisant AG à GK comme AE à EK; & en permutant AG est à AE comme GK à EK: Et partant la ligne AG est divisée Harmoniquement aux deux points E & K, & la ligne AK est moyenne Harmonique entre les deux extrêmes AG & AE. Maintenant, si l'on tire du point E par H une droite EF, elle sera parallèle à la rampe AB, (comme en la 7. Figure,) où elle la rencontrera comme en I. aux 8. & 9. Figures.

Premier Cas.

Fig. VII. Au premier Cas (Figure 7. de la 5. Planche.) Parce qu'aux triangles semblables GAB, EAO, la ligne GA est à AE comme GB est à EO; & aux triangles semblables GKB, EKP, la ligne GK est à KE comme la même GB est à EP; la raison de GA à AE étant égale à celle de GK à KE; il s'ensuit que la raison de GB à EO sera aussi égale à celle de GB à EP, & que la ligne EO, ou son égale FB sera égale à la ligne EP; & qu'aux triangles semblables EHP, FHB, les deux lignes EH & HF sont égales, & la ligne EF divisée en deux également en H; & comme elle est parallèle à la rampe AB, la Section qui passant par le point H, touchera les deux pieds droits AC en A & BD en B, touchera aussi la ligne EF en H. Et ceci tombe dans la solution du 7. Probl.

Second Cas.

Figures VII. Au second Cas, c'est à dire, lors que la ligne EF coupe la rampe AB en I, soit de la part de A (comme en la 8. Figure,) ou de la part de B (comme en la 9. Figure de la 5. Planche;) je dis que la raison de GA à AE étant la même que celle de GB à EO; & celle - cy étant composée des raisons de GB à BF & de BF à EO, c'est à dire, de IF à IE; la raison de GA à AE sera composée des raisons de GB à BF & IF à IE. De même la raison de GK à KE étant la même que celle de GB à EP, & celle - cy étant égale aux deux raisons de GB à BF & BF à EP, c'est à dire, FH à HE; la raison de GK à KE sera composée des raisons de GB à BF & de FH à HE: mais GA est à AE comme GK à KE; Et partant la composée de GB à BF & IF à IE, sera égale à la composée de GB à BF, & FH à HE; & ôtant la raison commune de GB à BF, les deux autres IF à IE, & FH à HE seront égales, & la ligne FI (dans la 8. Figure) sera divisée Harmoniquement aux points E & H; & la ligne EI (dans la 9. Figure) aux points

points F & H : Et en l'une & en l'autre la ligne IH sera moyenne Harmonique entre les deux extrêmes EI & IF. Et partant la Section, qui passant par le point H, touchera les deux pieds droits AC en A, & BD en B, touchera aussi la droite EH au point H. Et cecy tombe dans la solution du 9. Probl.

Voilà donc la résolution de tous les Cas qui peuvent estre considerez sur cette matière; où il paroist qu'il faut que le point donné se trouve entre les lignes des pieds droits, si l'on veut rendre la question possible; parce que l'Arc, qui partant des points A & B de la rampe, passeroit par un point posé hors les lignes AC, & BD prolongées, couperoit necessairement cesdites lignes, & par conséquent il ne les pourroit pas toucher aux points A & B.

Et de cette façon j'estime qu'il est pleinement satisfait à tout ce qui peut estre proposé sur la préparation nécessaire à la regle de Pappus, c'est à dire, à la recherche des diametres de mesme conjugaison d'un Arc à décrire, qui touche deux pieds droits en deux points donnez, soit que la hauteur de l'Arc ne soit pas donnée, ou qu'elle soit déterminée par un point, ou par une ligne, ou par un plan.

QUATRIÈME OBSERVATION.

Mais parce que l'austerité de la démonstration nous a obligé à quantité de lignes inutiles pour la pratique, & qui peuvent embarrasser les Ouvriers, qui ne sont pas accoustumés à les démesler; il m'a semblé que je ferois une chose qui leur seroit agréable, si je leur enseignois une Methode universelle & facile de trouver ces diametres en toute sorte de Cas. Ce qui se fait ainsi.

Manière universelle de trouver les diametres de mesme conjugaison de la Section qui doit former l'Arc rampant sur toute sorte de pieds droits & de hauteurs.

Soient (aux 7. premières Figures de la 6. Planche) les pieds droits AC & BD continuez indéfiniment, en sorte qu'ils se rencontrent en G, s'ils ne sont point parallèles; & la ligne de la rampe AB soit divisée en deux également en Z; & du point Z soit menée une droite, ou parallele aux pieds droits, (si ceux-cy le sont entre eux,) ou passant par le point de leur rencontre G: Ensuite soit la ligne donnée ou non donnée EF qui détermine la hauteur de l'Arc proposé, laquelle soit ou parallele à la ligne de la rampe AB, ou la rencontrant au point I; & cette ligne EF, comprise entre les lignes AC & BD continuées, soit coupée en deux également en K, d'où il faut mener une ligne KM égale à KF, & qui fasse quelque angle que ce soit avec EF; & mener IM, à laquelle du point F, il faut tirer une parallele FL, & faire KH égale à KL; puis du point H il faut mener la ligne HB, & la diviser en deux également en S, par où du point F il faut tirer la ligne FS Y; laquelle sera ou parallele à la ligne GZ, ou elle la rencontrera au point Y dans l'angle AGB, ou dans celui qui luy est au sommet. Au premier Cas la Section sera une Parabole en la 6. Figure. Au second Cas une Ellipse, aux 5. premières Figures, & une Hyperbole au troisième Cas dans la 7. Figure. Et joignant aux deux derniers Cas la ligne HY, & la continuant en sorte que YT soit égale à YH, & menant par le point Y la ligne VYX parallele à EF, sur laquelle du point B tombe la ligne BN parallele à HY; il faut faire YQ égale à YN, & sur la ligne QYX comme diametre, décrire le demicercle XRQ, qui soit coupé en R par la ligne YR tirée du point Y perpendiculaire à VX; & enfin faire les deux lignes YO, & YP égales

Fig. VII.
de la VI.
Planche.

à Y R : Les diametres de mesme conjugaison de l'Ellipse, ou de l'Hyperbole que l'on demande, seront les deux lignes HT & OP.

Et pour la Parabole, il faut du point B mener BN parallele à EF, (comme en la 6. Figure de la 6. Planche) & HV parallele à GZ, qui coupe BN en N; sur laquelle il faut prendre HV égale à BN, & du point V mener VX parallele à EF, & rencontrant la ligne HB prolongée en X; & enfin prendre sur EF continuée la ligne HT égale à VX. La ligne HN fera le diametre de la Parabole, auquel BN fera ordonnée sous l'angle HNB, & la ligne HT en fera le Parametre.

TROISIEME DISCOURS.

Trouver les Axes d'une Section servant à la description d'un Arc rampant, dont les diametres de mesme conjugaison sont donnez.

PREMIERE OBSERVATION.

Premier moyen par la Regle de Pappus.

Ces choses estant supposées, il ne reste plus qu'à trouver les Axes & les foyers pour décrire facilement la Section proposée, c'est à dire, appliquer, aux diametres trouvez de l'Ellipse, la Regle de Pappus, dont nous avons parlé au commencement de ces Discours, & dont nous rapporterons premièrement la pratique qui se doit entendre pour toute sorte de Cas, & nous la démontrerons ensuite. Le Probleme est donc tel.

REGLE DE PAPPVS.

Deux diametres de mesme conjugaison d'une Ellipse estant donnez, en trouver les Axes & les foyers ou singliots.

Figures

VIII.

IX. X.

XI. &

XII. de

la VI.

Planche.

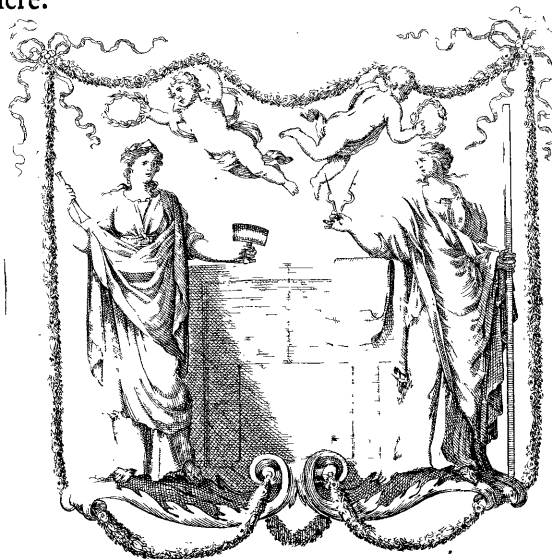
LES deux diametres de mesme conjugaison HT & OP estant proposez (aux 8. 9. 10. 11. & 12. Figures de la 6. Planche) & par le point H, la ligne EHF indéfiniment prolongée, & parallele à OP; il faut sur HT au point H élever à angles droits la ligne HI égale à OY, & mener IY; sur laquelle au point I il faut tirer à angles droits la ligne IK, qui rencontre la ligne TH prolongée en K. Ensuite, après avoir divisé en deux également au point R la ligne YK, & mené à angles droits la ligne RS, qui coupera EF en quelque part comme en S (parce que les diametres HT, & OP n'estant pas les Axes, l'angle HYP, ou son égal EHY ne sera pas droit;) il faut du point S comme centre, & de l'intervalle SY ou SK, décrire le cercle KRY β , lequel coupe la ligne EF aux deux points α & β ; d'où par le point Y, il faut mener les deux lignes indéfinies βY & αY ; sur lesquelles du point H, il faut mener à angles droits les lignes HL, & HM. Ensuite il faut faire sur la ligne βY prolongée la ligne NY égale à YL; & sur la ligne βN comme diametre, décrire un demicercle NQ β qui coupe αY au point Q, & rapporter la ligne YQ de part & d'autre du point Y sur βY , en sorte que les lignes YV, & YX soient égales à YQ; & par ce moyen nous aurons la route VX pour l'un des Axes. En la mesme manière prenant sur αY prolongée la ligne YZ égale à YM, & sur la route αZ comme diametre décrivant le demicercle $\alpha \lambda Z$ qui coupe βY prolongée au

au point λ ; il faut de part & d'autre du point Y, sur la ligne αY , prendre les deux YG & YZ égales à Y λ , afin d'avoir la toute GZ pour l'autre Axe. Et prenant une extrémité du moindre Axe comme le point G pour centre, & de l'intervalle G θ égal à la moitié de l'autre Axe, c'est à dire, à YV; il faut décrire les deux Arcs de cercle qui coupent la ligne βY , c'est à dire, le plus grand Axe aux deux points θ & ϵ , lesquels seront les foyers de la susdite Ellipse, que les Ouvriers appellent les singliots.

Voilà la pratique de Pappus, qui est la 14. proposition du 8. livre de ses Collections Mathématiques: Et quoy que je ne la rapporte pas tout-à-fait dans les mêmes termes, c'est pourtant toujours la même chose; & ce que j'y ay ajousté n'est que pour en faciliter l'exécution aux Ouvriers: comme lors qu'il dit seulement qu'il faut faire le rectangle YHK égal au quarré OY, parce que, la manière d'appliquer un quarré à une ligne droite, qui est la même que de trouver une troisième proportionnelle à deux droites données, n'est pas familière aux Ouvriers; j'ay mieux aimé leur en marquer l'opération par le moyen du triangle rectangle YIK, (dans lequel la ligne IH étant perpendiculaire à la base YK, le quarré HI, ou son égal OY est égal au rectangle YHK, ainsi que Pappus l'ordonne,) que de la supposer comme luy toute faite. Tout de même, quand il dit qu'il faut faire les deux quarrés YV, & YX égaux au rectangle βYL , & les deux quarrés YG & YZ égaux au rectangle αYM ; j'en ay fait les opérations toutes entières par le moyen des demicercles NQ β & $\alpha \lambda \zeta$.

Au reste, ce Probleme n'a que cette seule construction; & Commandin qui a commenté cet Auteur, s'étonne avec raison qu'il ne l'ait pas démontrée. Mais comme il y a dans le texte de la Proposition quelques obscuritez qui marquent qu'il a esté corrompu, je crois que la démonstration que Pappus en avoit faite s'est perdue avec le reste de ses Ouvrages qui nous manquent.

Mais ce qui me surprend davantage, c'est que Commandin ayant entrepris de la réparer, y ait si mal réussi luy-même, n'ayant pas pû conclure, comme il fait, que les lignes XV & GZ soient Axes de l'Ellipse, parce que l'angle $\beta Y \alpha$ est droit, aussi-bien que les angles au point L; mais bien seulement que au cas que la ligne XV soit l'Axe, la ligne HL luy sera ordonnée; puis que quelque point de la ligne EF que l'on prenne pour centre d'un cercle qui passe par Y, & coupe EF en deux autres points que β & α , d'où l'on mene deux lignes au même point Y; l'angle de ces lignes sera toujours droit au susdit point Y, & l'on pourra tirer du point H une ligne qui fasse aussi angle droit avec celle qui viendra d'un autre point que β au point Y; & cependant cette ligne ne sera pas l'Axe de l'Ellipse. Et je m'étonne que Commandin ne se soit pas apperceu que toute la force de la construction de Pappus dépend de ce que le rectangle YHK, c'est à dire, $\alpha H \beta$, est égal au quarré OY, & qu'il n'ait pas sceu la vérité de ce Theoreme que je démontre en cette manière.



THEOREME.

Si deux diametres de mesme conjugaison estant donnez dans une Ellipse, l'on tire de l'extrémité de l'un d'eux une Contingente qui rencontre les deux Axes: le rectangle des parties de la Contingente entre les Axes, & le point de l'attouchement, est égal au quart du quarré de l'autre diametre.

Figure
XIII.
de la VI.
Planche.

SOIENT dans l'Ellipse $VGXZ$, dont les Axes sont VX & GZ (dans la 13. Figure de la 6. Planche) deux diametres de mesme conjugaison HT & OP ; & de l'extrémité d'un d'eux, comme de H soit tirée la touchante $\delta H\beta$, (qui sera par conséquent parallele à OP), laquelle coupe les Axes, sçavoir VX au point β , & GZ au point δ ; je dis que le rectangle $\beta H\delta$ est égal au quarré OY .

Pour le démontrer, il faut premièrement au point O mener une autre Contingente $\xi O\pi$, (qui sera aussi parallele à HT), & qui coupe les Axes VX en π , & GZ en ξ ; puis au point V en mener une autre $\phi V\rho$, (laquelle sera aussi parallele à l'Axe GZ), & qui coupe la Contingente δH en ϕ , & OP prolongée en ρ ; enfin des points H & O mener HM & HL , $O\mu$ & $O\nu$ ordonnées aux Axes VX & GZ , & continuer HL en ϵ .

Maintenant, à cause de la touchante $\delta H\beta$, le rectangle βYL est égal au quarré VY ; & à cause de la touchante $\xi O\pi$, le rectangle $\pi Y\mu$ est aussi égal au mesme quarré VY ; les deux rectangles donc βYL , & $\pi Y\mu$ sont égaux: Et partant la ligne βY est à πY comme $Y\mu$ à YL . De plus, comme les lignes $\delta\beta$, OY sont paralleles, aussi-bien que les lignes $\pi\xi$ & HY ; les triangles βHY , $YO\pi$ sont semblables, aussi-bien que les triangles βHL , $YO\mu$: Et partant dans les deux premiers βY sera à πY comme $H\beta$ à OY ; & dans les deux derniers $H\beta$ sera à OY comme HL à $O\mu$; & par conséquent βY sera à πY comme HL à $O\mu$. Mais nous avons démontré cy-dessus que ϵY estoit à πY comme $Y\mu$ à YL , c'est à dire, dans les triangles $OY\mu$, ϵYL , comme $O\mu$ à $L\epsilon$: Donc HL sera à $O\mu$, comme $O\mu$ est à $L\epsilon$; & partant le rectangle $HL\epsilon$ sera égal au quarré $O\mu$; & par conséquent le quarré YL aura mesme raison au rectangle $HL\epsilon$, qu'au quarré $O\mu$. Mais la raison du quarré YL au rectangle $HL\epsilon$ est composée de celles de YL à HL , ou à son égale YM , & de YL à $L\epsilon$, c'est à dire, à cause que les triangles $YL\epsilon$, $\beta Y\delta$ sont semblables, de βY à $Y\delta$, lesquelles composent aussi la raison du rectangle βYL au rectangle δYM , ou de leurs égaux le quarré VY au quarré GY : Donc le quarré YL sera au quarré $O\mu$ comme le quarré VY au quarré GY , ou prenant leurs quadruples, comme le quarré de l'Axe VX au quarré GZ . Mais comme le quarré VX au quarré GZ , ainsi le rectangle $V\mu X$ est au quarré $O\mu$: Donc le quarré YL , & le rectangle $V\mu X$ auront mesme raison au quarré $O\mu$; & partant ils seront égaux: Et par conséquent le rectangle βYL sera au quarré YL , c'est à dire, la ligne βY à YL , comme le mesme rectangle ϵYL , ou son égal le quarré VY , au rectangle $V\mu X$; Et par conversion de raison ϵY sera à ϵL comme le quarré VY au quarré $Y\mu$. Mais comme ϵY à ϵL , ainsi $\epsilon\delta$ est à ϵH , c'est à dire, en prenant δH pour commune hauteur, le rectangle $\epsilon\delta H$ au rectangle $\epsilon H\delta$: Donc le rectangle $\epsilon\delta H$ sera au rectangle $\epsilon H\delta$ comme le quarré VY au quarré $Y\mu$. Mais à cause des paralleles δY , HL , & ϕV , le rectangle $\epsilon\delta H$ est égal

au

au quarré $\delta\phi$, comme le rectangle $\epsilon Y L$ est égal au quarré $V Y$: Et partant le quarré $\delta\phi$, ou son égal $Y\rho$, sera au rectangle $\epsilon H \delta$, comme le quarré $V Y$ au quarré $Y\mu$. Mais comme le quarré $V Y$ au quarré $Y\mu$, ainsi est le quarré $Y\rho$ au quarré $O Y$: Donc le quarré $Y\rho$ aura même raison au rectangle $\epsilon H \delta$ qu'au quarré $O Y$: Et par conséquent le rectangle $\epsilon H \delta$ est égal au quarré $O Y$. Ce qu'il falloit démontrer.

SECONDE OBSERVATION.

Autre moyen de trouver les Axes susdits.

APRE'S avoir suffisamment discouru sur la manière de Pappus, pour trouver les Axes d'une Ellipse, dont les diametres de même conjugaison sont donnez; il ne reste plus qu'à en enseigner une qui trouve ceux de la Parabole, & de l'Hyperbole, ainsi que nous l'avons promis. Mais comme la regle, par laquelle on résout le Probleme pour ces deux Sections, est universelle, & sert aussi à résoudre celui de l'Ellipse; il m'a semblé qu'il ne seroit pas inutile de l'expliquer en cet endroit, & que les Ouvriers m'auroient une double obligation, si je leur enseignois divers moyens de parvenir à un même but, desquels ils pourront choisir celui qui leur sera plus agréable, ou même faire la preuve de l'un par l'autre, puis qu'estant également vrais & démonstratifs, ils doivent également bien réussir, si on fait les operations comme il se doit.

Manière universelle de trouver les Axes d'une section Conique, dont les diametres de même conjugaison sont donnez.

Pour l'Ellipse & pour l'Hyperbole.

SOIENT donnez deux diametres de même conjugaison d'une Ellipse ou d'une Hyperbole HT & OP se coupans au centre Y , & l'angle HYP (comme aux 4. premières Figures de la 7. Planche.) Il faut premièrement prendre la ligne HD troisième Géometrique aux deux TH & OP , & l'ajouter à la ligne TH dans l'Ellipse, ou la retrancher de la même TH dans l'Hyperbole, ou enfin retrancher la ligne TH de DH , si celle-cy est plus grande que l'autre; puis couper en deux également en I la toute, ou la difference TD . Ensuite sur la ligne HY comme diametre soit décrit le demicercle $HNKY$, (en sorte qu'il ne coupe point l'autre diametre OP) dont le centre soit G , dans lequel soit appliquée HN parallele à OP , & continuée indéfiniment; puis, après avoir divisé HN en deux également en C , & tiré GC , il faut prendre sur CH continuée, s'il en est besoin, la ligne CB égale à IH , & tirer BL parallele à GC , ou perpendiculaire à CB , laquelle BL rencontre la ligne TH prolongée, s'il est besoin, en L , d'où il faut mener LM parallele à OP , & égale à HD , (de la part de H vers C dans l'Hyperbole, & dans l'Ellipse, si le point I se rencontre entre les points D & H comme en la Figure 3, ou de la part opposée, si le point H se trouve entre I & D , comme en la 4. Figure;) & du point M par G mener MKG , qui coupe le demicercle en K , par où des points H & Y il faut mener indéfiniment les lignes HKQ , & YKF , qui rencontre HN continuée en V ; après quoy entre les deux VY & YK , il faut

Figures 1.
II. III.
IV. de
la VII.
Planche.

54 DES ARCS RAMPANS SECOND PROBLEME.

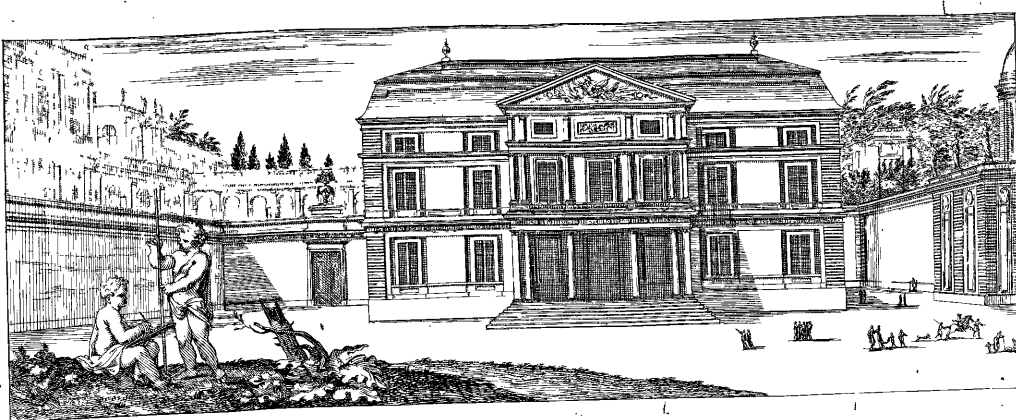
faire YE moyenne Géométrique, à laquelle il faut prendre YF égale, & tirer des points E & Y des lignes indéfinies ER , & ZYX parallèles à HK ; puis aux deux EK & KH faire une troisième Géométrique KQ , & du point F par Q mener FQR , qui coupe ER en R ; & enfin entre les deux ER , & EF , trouver une moyenne Géométrique, dont la moitié soit égale à chacune des lignes YX & YZ : Et faisant dans l'Ellipse du point F sur l'Axe XZ les lignes FA , & FS égales à YZ ; ou bien dans l'Hyperbole du point Y sur l'Axe EF , les lignes YA & YS égales à EZ ; On aura les deux Axes que l'on demande ZX & EF , & les deux foyers ou singliots A & S .

Pour la Parabole.

Figure V. de la VII. Planche. Soit OZ le diametre d'une Parabole, & OR son parametre en l'angle ROZ , (comme en la 5. Figure de la 7. Planche.) Et après avoir continué ZO au dessus du point O , il faut prendre OP égal à la moitié du parametre OR ; & du point P tirer la ligne PQ perpendiculaire à RO continuée, s'il en est besoin, & du point Q mener QT parallèle à OZ , & OS perpendiculaire à QT ; ensuite, après avoir divisé QS en deux également en X , mener XV parallèle à OS , & troisième Géométrique aux deux lignes XS & OS . Je dis que le point X fera le sommet, la ligne XT l'Axe, & XV le costé droit de la Parabole proposée.

Fig. X. XI. XII. XIII. XIV. de la VII. Planche. La démonstration de cette manière universelle se fait en cette manière. Après avoir du point K (dans les Figures 10. 11. pour l'Hyperbole, & 12. 13. & 14. pour l'Ellipse, pour éviter la confusion des lignes dans les 4. premières Figures) mené la ligne $K\pi$ parallèle à NH , & qui rencontre la ligne GC prolongée, s'il en est besoin, au point O' , je raisonne ainsi. Les triangles GHC , LHB estans semblables, LH sera à GH comme BH à HC , & en composant (dans les 10. 11. & 13. Figures) ou par conversion de raison (dans la 12.) LG sera à GH comme BC à CH . Mais à cause de la similitude des triangles LGM , $HG\theta$; LG est à GH comme LM à $H\theta$: Donc BC est à CH comme LM est à $H\theta$; & en permutant BC est à ML comme CH à $H\theta$. Mais comme BC a été prise égale à IH , & ML égale à HD ; & comme CH est à $H\theta$, ainsi $O\pi$ est à πK : Donc IH est à HD comme $O\pi$ est à πK : Et (dans la 10. Figure) en changeant, par conversion de raison, en doublant les conséquens, par conversion de raison, & en changeant; ou (dans la 11. Figure) en divisant, doublant les antécédens, & en composant; ou bien (dans la 12. Figure) en changeant, par conversion de raison, doublant les conséquens, en divisant, & en changeant; ou (dans la 13. Figure) en composant, doublant les antécédens, & en divisant; ou enfin (dans la 14. Figure) en changeant, par conversion de raison, doublant les conséquens, en divisant & changeant; HT sera à DH comme $\pi\rho$ est à $K\pi$, c'est à dire, comme le rectangle $\rho\pi K$ est au carré $K\pi$, ou comme le rectangle $H\pi Y$ au même carré $K\pi$; & en changeant, le carré de la ligne $K\pi$ sera au rectangle $H\pi Y$ comme la ligne HD est à HT , c'est à dire, au double de la ligne HY . Mais HD a été prise dans tous les Cas la troisième proportionnelle aux deux diametres de même conjugaison HT & OP : Donc la ligne HD sera le parametre du diametre HT , par la 4. des secondes def. du 1. des Coniques d'Apollonius; & HT estant à la double de HY comme le carré de $K\pi$ est au rectangle $H\pi Y$; le point K est trouvé, ainsi que le demande la préparation des deux cas des Propositions 53. & 54. du 1. des Coniques d'Apollonius; & le reste de nostre pratique est le même que ce qui est fait & démontré dans ces deux Problemes. La démonstration pour la Parabole est toute entière dans la 52. Proposition du même Livre.

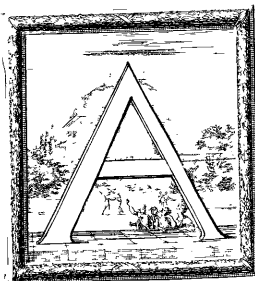
RESOLUTION



RESOLUTION DES QUATRE PRINCIPAUX PROBLEMES D'ARCHITECTURE.

*TROISIÈME PROBLEME RESOLV.
Trouver Géométriquement les véritables joints de teste de
toutes sortes d'Arcs rampans. * * **

PREMIER DISCOURS.



PRE's avoir enseigné cy-dessus la manière de décrire les Arcs rampans, il est bien juste d'avertir les Ouvriers que leur pratique ordinaire d'en tracer les joints de teste est inutile, ou fautive. Voicy ce qu'ils font.

Ils divisent premièrement l'Arc comme DAF (dans la 6. *Fig. VI. de la VII. Planche.* Figure de la 7. Planche,) en autant de portions qu'ils veulent faire de Vouffoirs, comme AB & AC; & voulant tirer le joint de teste, par exemple du point A, ils mettent le Compas sur le point B, & de quelque ouverture que ce puisse estre, pourveu qu'elle soit plus grande que la ligne AB, ils font de part & d'autre deux Arcs de cercle comme NM & PQ; puis rapportant le Compas au point C, ils en font deux autres comme RH & TV, qui coupent les premiers en G & O,
E e

par où ils tirent la ligne GO ; (qui passera nécessairement par le point A ,) & ils prennent la portion AG pour leur joint de teste ; ce qu'ils font par tous les points de la division de leur Arc, pour avoir par ce moyen tous les autres joints de teste.

Sur quoy je dis premièrement, qu'il n'y a qu'aux seuls Cas, où l'Arc proposé est portion de cercle, ou bien lors qu'estant une section Conique, le joint se doit tirer par l'un des sommets, que cette Regle n'est pas fausse ; auxquels Cas en échange elle est inutile, puis qu'il ne faut alors que tirer les joints au centre ; & qu'en tous les autres Cas, où l'Arc proposé est portion d'une autre ligne que circulaire, elle est absolument fausse & absurde.

Parce que sur cette Hypothese on peut tirer une infinité de lignes différentes, & tendantes à differens points, qui passeront néanmoins par un même point de division de l'Arc, & pourront toutes également estre le joint de teste du même Arc en ce même point. Je veux dire que suivant cette methode on pourra faire passer une infinité de lignes par le point A comme AG , AH , &c. tendantes à differens points comme G , H , &c. & qui pourront autant l'une que l'autre estre prises pour le joint de teste de l'Arc DAF au point A ; ce qui est absurde, puis qu'il n'y a qu'un seul joint de teste qui puisse estre legitiment appelé tel en chaque point de quelque Arc que ce puisse estre ; & la regle par conséquent qui en produit plusieurs ne peut estre que fausse & absurde.

Or qu'il soit vray que par la regle susdite on puisse tirer une infinité de lignes par le point A , qui pourront toutes estre également prises pour le joint de teste de l'Arc DAF en ce même point, je le montre en cette manière. Soit par exemple l'Arc DAF portion d'une Ellipse, & le point A pris ailleurs qu'au bout d'un des Axes : Et après avoir comme dessus pris les points B & C également distans de A , & tiré les Arcs MN , RH & PQ , TN , afin que des points de leur rencontre G & O , on puisse mener la ligne GAO , laquelle sera perpendiculaire à la ligne BC , & la divisera en deux également en X , & la ligne AG fera par cette operation le joint de teste du point A .

Je dis maintenant, que si on prend quelque'autre point dans l'Arc comme D , duquel on tire une ligne DE parallele à BC , & rencontrant la section en E , & la droite GO en I , les angles au point I seront aussi droits ; mais les droites DI & IE ne sont point égales, parce qu'autrement la ligne AO seroit l'Axe de l'Ellipse, (les deux lignes BC & DE estant paralleles, & toutes deux divisées également, & à angles droits par AO ;) ce qui est contre l'Hypothese : Et partant DI ne sera point égale à IE , ni par conséquent la droite AD à la droite AE ; Et partant si du point A nous inscrivons dans l'Ellipse une ligne AF égale à AD , elle tombera ou dessus ou dessous du point E , & la ligne DF dessus ou dessous de DE , & les angles faits au point K par la ligne GO ne seront point droits ; & partant DK & KF ne seront point égales : Et partant si des points D & F également distans du point A , on fait selon la regle susdite des Arcs de cercle au dessus & au dessous, par le rencontre desquels on tire une droite comme HL ; elle passera par le point A , & coupera au point L la ligne DF en deux également, & par conséquent elle ne sera pas la même que GK , & la droite AH ne sera pas la même que AG ; & AH fera néanmoins le joint de teste de l'Arc au point A , suivant la regle susdite. Et comme on peut prendre une infinité de points differens également distans de part & d'autre du même point A , & par le moyen desquels on peut faire une infinité de lignes différentes par la regle susdite, qui peuvent estre aussi legitiment prises pour le joint de teste de l'Ellipse au point A , que la ligne AG ; & comme ce que je viens de démontrer pour l'Ellipse, peut estre aussi bien entendu pour toute autre sorte de ligne courbe differente de la circulaire ; il s'ensuit ce que nous avons dit cy-dessus, & par conséquent que la regle qui est communément en usage parmy les Ouvriers, est fausse.

SECOND DISCOURS.

Mais comme il seroit inutile d'avoir découvert la fausseté de la pratique ordinaire, si l'on n'en enseignoit une autre qui ne soit pas sujette à ces défauts: j'ay pour ce sujet assez sérieusement medité sur cette matière; sur laquelle j'ay premièrement reconnu que la vraie & universelle manière de tracer les joints de teste de toutes sortes d'Arcs dans toute leur perfection, tant pour la sûreté & solidité de la liaison des Vouffoirs, que pour la beauté & l'élégance du trait, consistoit à les tirer perpendiculaires à l'Arc, c'est à dire, à plomb sur les lignes qui toucheroient l'Arc aux mêmes points; puisque cette pratique, (qui est la même que celle dont on se sert au cercle où les joints de teste vont au centre,) ne détermine jamais qu'un seul joint de teste en chaque point, & donne aux coupes des Vouffoirs toute la force & la grace, dont l'Arc puisse estre capable. Et pour la rendre familière aux Ouvriers, j'ay tâché de leur en composer deux regles si faciles, que rien ne les puisse d'oresnavant empêcher de s'en servir; & quoy que les Arcs puissent estre portions de différentes Sections du Cone, comme du Cercle, de l'Ellipse, de l'Hyperbole, ou de la Parabole; je les ay néanmoins conceûs sous des termes si généraux, & si propres, qu'elles peuvent également servir à toutes.

*Manière universelle de tirer les joints de teste de toutes
sortes d'Arcs rampans.*

Il faut de chaque point de l'Arc tirer des perpendiculaires à l'Axe de la Section, qui coupent le diamètre qui passe par le point, où le costé droit ou parametre du même Axe est coupé en deux également; & du point où la perpendiculaire rencontre l'Axe comme Centre, & de l'intervalle compris entre le susdit Axe & ledit diamètre, faire un Arc de cercle, qui coupera l'Axe en deux points, de l'un desquels, sçavoir de celui qui est le plus éloigné du sommet de la section, il faut mener par le point premièrement pris dans l'Arc rampant, une ligne droite, qui marquera le joint de teste que l'on demande.

Soit la ligne ACB l'Axe d'une section BKKB, (aux 7. 8. & 9. Figures de la 7. Fig. VII. VIII. & IX. de la VII. Planche. Planche) dont la ligne BH soit le costé droit ou parametre; & par le point I qui divise BH en deux également, soit menée indéfiniment le diamètre IN: Puis de quelque point pris dans la section comme de K, soit menée la ligne KMN perpendiculaire à l'Axe qu'elle coupe en M, & le diamètre IN en N; & du point M comme centre, & intervalle MN, (c'est à dire, de la portion de la perpendiculaire comprise entre l'Axe ACB & ledit diamètre IN:) soit fait le cercle NL qui coupe le même Axe au point L, en sorte que le point M soit toujours entre le sommet de la section dont il est le plus proche, & le susdit point L; duquel par le point K, il faut tirer la ligne LKO, qui donnera la droite KO pour le joint que l'on demande.

Mais parce que les Ouvriers ne sçavent pas toujours comme on trouve ce diamètre IN, il est à propos de leur en enseigner la manière; supposé, par ce qui a esté montré dans le précédent Probleme, qu'ils connoissent les Axes de la section proposée, qui soient par exemple les lignes ACB & ECD, par le moyen desquels il faut trouver la ligne BH costé droit ou parametre de l'Axe ACB, ce qui se fait ainsi. Il faut du centre C prendre sur l'Axe CA la ligne CF égale à CD, & du point F tirer la ligne FG parallèle à AD, & du point A par G dans l'Ellipse & l'Hyperbole, (Figures 7. & 9.) tirer la droite AGH, qui coupe en H la ligne BH perpendiculaire à AB; ou bien dans la Parabole (Figure 8.) faire AH égale à CG, & tirer indéfiniment la ligne HG, afin que l'on aye par ce moyen

en toutes les Figures la ligne droite BH pour le costé droit, ou parametre que l'on recherche, qui estant divisé en deux également en I , & tirant du centre C dans l'Ellipse & l'Hyperbole, la ligne CIN , ou bien tirant dans la Parabole la ligne IN parallele à AC ; la mesme IN sera le diametre de la section que l'on demande. Ce que je démontre en cette manière.

Mais auparavant je dois dire que les diametres de la Parabole estant tous parallels, il paroist qu'il n'y a aucun centre de cette Figure, c'est à dire, aucun point de concours des diametres; & pour cet effet nous avons mis les deux extrémités de l'Axe A & B en un seul point, qui est le sommet; Et pour le point C qui sert de centre, nous l'avons pris à fantaisie dans l'Axe, par lequel nous avons mené l'ordonnée ECD , qui fait en la Parabole, en quelque endroit que l'on la prenne, le mesme effet que le second Axe dans les autres Figures.

Je dis donc pour démontrer que la ligne IN est le diametre que l'on cherche. Parce que CF est égale à CD , & GF parallele à AD ; la ligne AC sera à CD , comme CF , ou son égale CD à CG : Et partant, dans la Parabole (Figure 8.) le quarré de CD sera égal au rectangle ACG , & la ligne CG , ou son égale AH , sera le parametre ou costé droit de l'Axe de la Parabole AC . Mais dans l'Hyperbole & l'Ellipse (Figures 7. & 9.) puisque AC est à CD comme CD est à CG ; le quarré AC sera au quarré CD (ou leurs quadruples, sçavoir le quarré de l'Axe AB au quarré de l'Axe ED ,) comme la ligne AC à la ligne CG , c'est à dire, comme l'Axe transverse AB à BH : Et par conséquent la ligne BH sera le parametre ou costé droit de l'Axe transverse AB .

Maintenant, pour démontrer que les lignes KO sont les veritables joints de teste de la section proposée, & qu'ils la coupent à angles droits; il faut de quelque point que ce soit de la section comme k , par lequel on a tiré un joint de teste ko , mener une ligne droite kR perpendiculaire à la ligne ko , & qui rencontre l'Axe de la section continuée en R , & prolonger la droite km jusqu'à ce qu'elle trouve GH continuée au point q . Après quoy, pour faire voir que le joint ko coupe la section à angles droits, ou (ce qui est la mesme chose) que la ligne kR touche la section au point k , je raisonne en cette sorte. Dautant que du sommet k du triangle rectangle $l k R$, on a mené une droite km perpendiculaire à la base RI , le rectangle $R m l$ sera égal au quarré de km : Mais le mesme quarré km est aussi égal au rectangle $B m q$, par les 11. 12. & 13. du 1. des Coniques d'Apollonius: Donc les rectangles $R m l$ & $B m q$ seront égaux; mais parce que la ligne ml est égale à mn , le rectangle $R m l$ sera aussi égal au rectangle $R m n$; & partant les deux rectangles $R m n$ & $B m q$ seront égaux; & la ligne $R m$ sera à $B m$ comme $m q$ à mn , & en divisant RB à $B m$ comme qn à mn : Et partant comme la ligne qn dans la Parabole (Figure 8.) est égale à la ligne mn , la ligne RB sera aussi égale à $B m$, & la droite kR touchera la Parabole en k par la 33. du 1. des Coniques. Mais pour l'Ellipse & l'Hyperbole (Figures 7. & 9.) puisque RB est à $B m$ comme qn est à mn , & qn est égale à HI ou BI ; la ligne RB sera à $B m$ comme BI à mn , c'est à dire, comme BC à $C m$; en permutant & composant RC sera à BC comme BC à $C m$. Et comme AC est égale à CB ; la toute RA dans l'Ellipse sera divisée Harmoniquement aux deux points B & m , & la toute Am dans l'Hyperbole aux deux points B & R : & partant, en l'une & en l'autre, la ligne AR sera à BR comme Am à $B m$; & la ligne kR touchera la section au point k , par la 34. du 1. des Coniques. Et comme la mesme chose se peut semblablement démontrer dans tous les points de la section, il paroist de la verité de la proposition. Ce qu'il falloit démontrer.

Seconde manière de tirer les joints de teste de toutes sortes d'Arcs rampans.

IL faut de chacun des foyers de l'Ellipse & de l'Hyperbole mener des lignes qui se rencontrent en un même point de l'Arc ; Mais dans la Parabole il faut du foyer mener une droite, qui soit coupée en un point de l'Arc par une ligne parallèle à l'Axe. Ensuite dans toutes les sections, l'angle qui est fait par ces lignes au point de l'Arc, doit être coupé en deux également par une droite, qui sera le joint de teste que l'on demande.

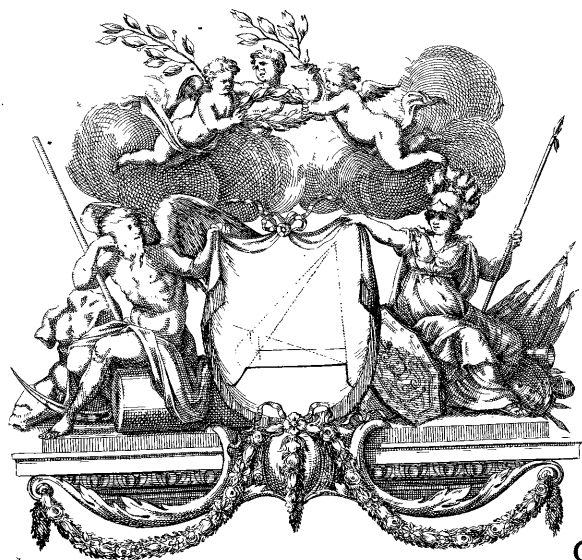
Des points G & F foyers de l'Ellipse ou de l'Hyperbole, (dans les 15. & 16. Figures) il faut tirer tant de lignes que l'on voudra GH, FI qui se coupent en des points de l'Arc comme en K. Tout de même, il faut du point F foyer de la Parabole, (dans la 17. Figure) mener FI qui soit coupée en un des points de l'Arc K, par la ligne HK parallèle à l'Axe de la Parabole AF. Ensuite (dans toutes les trois Figures) il faut faire les deux lignes HK & IK égales, & des points I & H comme centres, & de quelque intervalle que l'on voudra, (pourvu qu'il ne soit pas plus petit que la moitié de la distance entre I & H) l'on doit décrire les deux Arcs qui se coupent au point L, d'où il faut mener OLK, qui sera le joint de teste que l'on recherche.

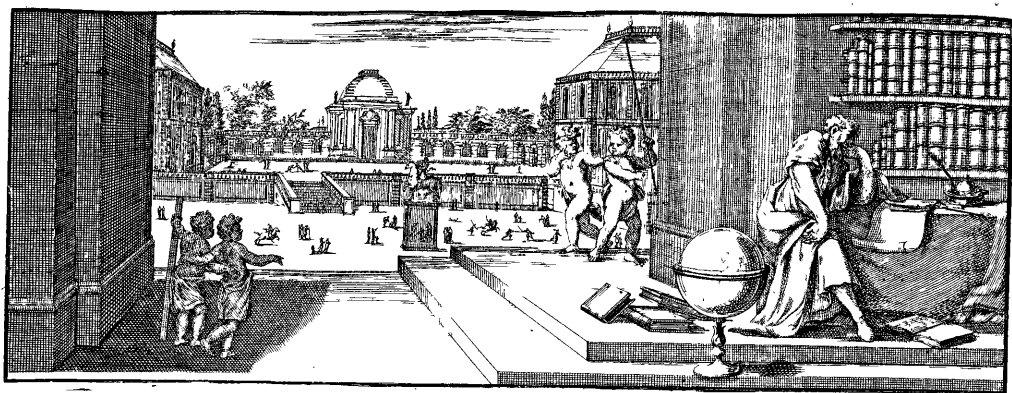
La démonstration en est aisée : Car ayant mené par un des points K la ligne MKN qui touche la section au point K, qui sera par conséquent (ainsi qu'il a été démontré par d'autres) l'angle MKI égal à NKH ; & l'angle IKL ayant été fait égal à HKL, il s'ensuit que l'angle MKL est égal à NKL ; & partant, que LK est perpendiculaire à la contingente.

Les points G & F foyers de l'Ellipse (dans la 15. Figure) se trouvent, en faisant les lignes EF & EL (qui sont tirées d'une des extrémités du petit Axe ED sur le grand Axe AB) égales à CB, moitié du grand Axe AB.

Ceux de l'Hyperbole G & F (dans la 16. Figure) se trouvent, en prenant du point C, qui est le centre, les lignes CG & CF sur le grand Axe, égales à la ligne EB tirée d'un des bouts du petit Axe ED à une des extrémités du grand Axe AB.

Le foyer de la Parabole F (dans la 17. Figure) se trouve, en faisant depuis le sommet A la ligne AF égale à AG, c'est à dire, au quart de la ligne AD qui est le parametre, ou le côté droit de la Parabole.





RESOLUTION DES QUATRE PRINCIPAUX PROBLEMES D'ARCHITECTURE.

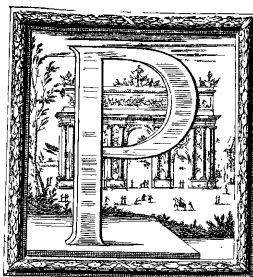
*QUATRIÈME PROBLEME RESOLV.
Trouver la ligne sur laquelle les Pontres doivent estre coupées
en leur hauteur & largeur, pour les rendre par tout
également fortes & résistantes.*

PREMIER DISCOURS,
OU

F. B. EPISTOLA AD P. VV.

*In quâ celebris Galilei propositio discutitur circa naturam
lineæ quâ Trabes secari debent secundum altitudinem, ut
sint equalis ubique resistentiæ; & in quâ lineam illam non
quidem Parabolicam, ut ipse Galilaus arbitratus est, sed
Ellipticam esse, demonstratur.*

F. B. P. VV. S. P. D.



PERGRATÆ mihi tuæ litteræ fuerunt, cùm ex illis intelligam & te valere, & me à te amari; quamquam subiratior videaris quòd ad te rarò scribam, id quod non tam meâ negligentia quàm penuriâ Tabellariorum contigisse, credas velim. Nam à quo tempore à Sarmatis ad Cimbros evolavit Heros vester, nemo sanè fuit qui ad te tutò perferret litteras, etsi id optabam vehementer, tùm ut sinceras tibi grates agerem, quòd officiosâ tuâ confabulatione sciverit Magnus ille noster amicus, maximo me affectum fuisse gaudio, cùm summum Arctoi maris imperium, ei concessisse mihi nuntiatum est; tùm etiam ut tibi significarem, id mihi perutile futurum, si me quâ soles benignitate apud illum amicâ commendatione prosequeris.

Cæterùm perjucunda mihi profectò fuit elegantissima tua narratio de admirabili illâ Machinâ quâ in Colossicoteri tui Leonis Hyperborei constructione uti te dicis; & magnopere me delectat ista contemplatio intricatissimæ illius tignorum, rudentum & ferramentorum compagis, quæ Rectoris imperio ingenioque ita se præstat obsequentem: Sed pergratum mihi feceris, si per te certior aliquando fiam, quandonam Navis tua

Premet imperiosa suum mare?

Ingens enim de illâ percrebuit rumor, dignam scilicet fore, cui

Baltica tota lubens deserviat ora.

Quod autem scribis, sectas à te ex præscripto Galilæi lineâ Parabolicâ secundùm altitudinem Trabes, ut æqualis ubique forent resistentiæ, non omninò expectationi tuæ respondisse; istud me primùm non mediocriter commovit: tantæ enim apud me existimationis vir ille semper fuit, ut inducere in animum nunquam possem, quicquam ab eo minùs sapienter excogitatum posse à nobis aliquando resarciri.

Verùm re penitiùs introspectâ, discussisque iis propositionibus, quas de resistentiâ Solidorum 2. lib. Mechan. conscripsit; & quandoquidem tu me meam ea de re sententiam rogas; ita me censere fateor, neque dissimulabo Delusum sanè istâ ratione fuisse Galilæum, ut ea trabibus utrinque fultis congruere arbitratus fuerit, quæ tignis alterâ sui parte in murum infixis, aliâ verò liberè prominentibus convenire rectè demonstraverat.

Etenim quando asserit momentum resistentiæ in A (licet enim mihi affari te *Fig. 1.* verbis Geometricis) Cunei seu Prismatis triangularis ABGDF esse ad momentum *Tab. 8.* ejusdem in C, ut linea AB est ad lineam CB: At è contrario momentum resistentiæ in A Trabis, seu Prismatis quadrangularis ABED, esse ad momentum ejusdem in C, ut linea CB est ad lineam AB: Id profectò aliter intelligi non potest, nequidem ex ipso Galilæanæ demonstrationis contextu, quàm si Prismata muro firmiter in punctis vel A, vel C adhærentia supponantur, dum Pondera ex B dependeant, quæ sic augeantur, ut Prismatum resistentiis evadant tandem æqualia; quorum ponderum eadem tunc erit ratio, quæ linearum AB & CB.

At si Trabs AE secari intelligatur per lineam Parabolicam FNKB, unde Solidum fiat AFNBGOD, quod Cuneum Parabolicum appellare licet; tunc ipse *Fig. 2.* Galilæus infert, ex iis quæ antè demonstraverat, momenta resistentiæ in quibusvis *Tab. 8.* punctis esse æqualia; id est, (ut patet ex contextu demonstrationis) Ponderus quod pendens ex B, Solidum Parabolicum frangeret infixum in parietem in puncto A, seu per superficiem AFD; idem etiam Ponderus pendens ex eodem B, idem Solidum frangeret infixum in parietem in puncto C, seu per superficiem CNO, & sic

H h

de cæteris. Quod perutile futurum ait rei ædificatoriæ, ac construendis præsertim navigiis, in quibus transtra quæ foros sustinent tertiâ ponderis & molis parte mul-
tari possint, salvâ & incolumi resistentiâ.

At ego (mi VV.) fateor, prorsus ignorare me, cuinam id usui esse possit, tran-
stra enim in navibus nulla sunt quæ utrinque non suffulciantur, & quorum extre-
ma, imò & sæpè media pars, quibusdam rebus non insideant firmiter incumbant-
que.

Sed & rei Ædificatoriæ parùm id opinor subsidij afferet, cùm omnis ferè quæ
in illa adhibetur materies, utrâque extremitate firmis quibusdam fulcimentis susti-
neatur; sic in contignationibus Trabes mutulis aut parietibus, asseres trabibus, co-
lumen Columnis, cantherij capreolis & transtris, & templa cantheriis insunt: nec
ullum ferè tignum reperias, cujus extremitas altera in murum infixâ sit, altera verò
liberè extrâ promineat; nisi si quod in subgrundis domorum extet sustinendis tro-
chleis, quibus pondera attollantur in Cænacula, aut in mutulis quæ Mæniana suf-
fulciant.

Restat igitur ut, si eadem tigna utrinque fultra supponantur, incumbantque in di-
versis eorum partibus illa pondera quæ trabes effringere possint; Quanam inter ista
proportio intercedat, inquiramus.

PROPOSITIO PRIMÆ

Fig. 1.
Tab. 8.

Ac primùm quidem de Prismate quadrangulâri ABE fulto in A & B, notum
est ex eodem Galilæo, momentum resistentiæ in C ad momentum resistentiæ in H,
id est, minimum pondus quod incumbens in P, trabem frangeret, ad minimum
pondus quod eandem frangeret in M, esse ut rectangulum AHB ad rectangu-
lum ACB; hoc enim ab ipso demonstratum est.

PROPOSITIO SECUNDÆ

Fig. 1.
Tab. 8.

At in Prismate triangulâri seu Cuneo ABGDF, momenta resistentiæ sunt in-
ter se, ut rectangula sub alternis lineæ AB partibus; id est, momentum in C est
ad momentum in H, ut rectangulum sub lineis AH, CB, ad rectangulum sub li-
neis AC, BH. Est enim ratio momenti resistentiæ Cunei in C ad momentum re-
sistentiæ ejusdem in H, composita ex rationibus momenti Cunei in C ad momen-
tum resistentiæ Prismatis quadrangulâris seu trabis AE è quâ nascitur in eodem
puncto C, momenti resistentiæ trabis in C ad momentum ejusdem in H, & tan-
dem momenti resistentiæ trabis in H ad momentum resistentiæ Cunei in eodem H.
Sed ratio momenti resistentiæ Cunei in C ad momentum trabis in eodem C est (ex
Galilæo) ut quadratum CN ad quadratum CP seu AF, id est, ut quadratum CB
ad quadratum AB, (componitur enim ex rationibus partium solidi contentarum
in superficiebus CO & CI quæ sunt inter se ut superficies, id est, propter com-
munem altitudinem NO, IP, ut lineæ CN & CP, & ex ratione distantiarum
actionis earumdem, quæ etiam sunt ut eadem lineæ CN, CP:) Ratio verò mo-
menti resistentiæ Prismatis quadrangulâris seu trabis in C, ad momentum ejusdem
in H est ex eodem Galilæo, ut rectangulum AHB ad rectangulum ACB; & tan-
dem ratio momenti resistentiæ trabis in H ad momentum resistentiæ Cunei in eo-
dem H, est ut quadratum HM seu AF ad quadratum HK, id est, ut quadra-
tum AB ad quadratum HB: Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei, seu Prismatis
triangulâris in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, componitur ex rationi-
bus quadrati CB ad quadratum AB, rectanguli AHB ad rectangulum ACB, &
quadrati AB ad quadratum HB. Sed rationes quadrati CB ad quadratum AB, &
quadrati AB ad quadratum HB sunt æquales rationi quadrati CB ad quadra-
tum HB; & ratio quadrati CB ad quadratum HB æqualis rationibus linearum CB
ad

DE LA COUPE DES POUTRES ÉGALEMENT RESISTANTES. 63
 ad BH plus CB ad BH; ratio verò rectanguli AHB ad rectangulum ACB, eadem est quæ linearum AH ad AC plus HB ad CB: Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei in C ad momentum ejusdem in H, componitur ex rationibus linearum CB ad BH plus CB ad BH, plus AH ad AC plus BH ad CB. Atqui rationes CB ad BH plus BH ad CB sese mutuò destruunt: Superfunt ergo rationes AH ad AC plus CB ad BH quæ componunt rationem rectanguli AHB, CB ad rectangulum AC, BH. Unde patet propositum.

PROPOSITIO TERTIA.

SIC si trabs ABE utrinque secetur per diagonales AQ, QB quæ Solidum *Fig. 3.*
 deinceps Cuneatum AQBTRS efficiant, occurrentes in medio trabis QR. *Tab. 8.* Momentum resistentiæ duplicis illius Cunei in C, erit ad momentum ejusdem in H, ut rectangulum sub lineis HB, BC ad rectangulum sub AC & AH. Nam ratio momenti resistentiæ duplicis Cunei in C ad momentum ejusdem in H, componitur ex rationibus momenti in C ad momentum in G, & momenti in G ad momentum in H. Sed demonstrabitur, ut supra, momentum Cunei in C ad momentum ejusdem in G, esse in ratione compositâ quadrati lineæ CN ad quadratum lineæ GQ, & rectanguli AGB ad rectangulum ACB: Sed ratio quadrati CN ad quadratum GQ eadem est quæ quadrati CB ad quadratum GB seu ad rectangulum AGB: Ergo ratio momenti in C ad momentum in G, componetur ex rationibus quadrati CB ad rectangulum AGB, & rectanguli AGB ad rectangulum ACB, quæ quidem sunt æquales rationi quadrati CB ad rectangulum ACB, vel denique rationi lineæ CB ad lineam AC. Eodem argumento demonstrabitur momentum resistentiæ Cunei in G ad momentum resistentiæ ejusdem in H, esse ut linea HB ad lineam AH: Ergo ratio momenti resistentiæ duplicis Cunei in C, ad momentum ejusdem in H, componetur ex rationibus linearum CB ad AC plus HB ad AH: quibus etiam componitur ratio rectanguli HBC ad rectangulum HAC. Unde patet propositum.

PROPOSITIO QUARTA.

QUOD autem ad lineam Parabolicam spectat, quâ quadrifariam secari trabes possunt secundum altitudinem, neutro tamen modo continget unquam, ut momenta resistentiæ supersint ubique æqualia. Etenim trabs AE eâ ratione secetur ut *Fig. 2.*
 Axissemiparabolæ sit longitudo trabis AB, amplitudo verò dimidia, sit ejusdem altitudo AF, (planè ut superior Galilæi figura docet,) unde Solidum AFNBGOD *Tab. 8.* oriatur, quod Cuneum Parabolicum appellare licet: Quòdque si utrinque fulciatur in A & B, momentum resistentiæ ut in C, erit ad momentum resistentiæ ut in H, in ratione lineæ AH ad lineam AC.

Nam demonstrabitur ut supra rationem momenti resistentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum ejusdem in H, componi ex ratione quadrati CN ad quadratum HK, (id est, propter Parabolam lineæ CB ad lineam HB) plus ratione rectanguli AHB ad rectangulum ACB, (id est, ratione linearum AH ad AC plus HB ad CB: Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei in C ad momentum ejusdem in H, componetur ex rationibus linearum CB ad HB plus HB ad CB, plus AH ad AC; sed ratio CB ad HB destruit rationem HB ad CB, est enim ratio æqualitatis quæ in compositione rationum nihil addit aut demit: Ergo superest ratio lineæ AH ad AC, cui æqualis est ratio momenti resistentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO QUINTA.

Fig. 4.
Tab. 8.

DEINDE ipsa Trabs AE secetur diagonaliter à duabus semiparabolis AKQ , BNQ , quarum Axis communis sit AB & dimidia amplitudo etiam communis GQ , quæ occurrentes in medio Trabis in Q , efficiant Solidum $AKQNB$, $TORLS$, quod duplicem Cuneum Parabolicum appellare possumus; in quo momentum resistentiæ in C erit ad momentum resistentiæ in H , ut linea HB ad lineam AC .

Etenim ratio momenti resistentiæ duplicis Cunei Parabolici in puncto C ad momentum resistentiæ ejusdem in puncto H , componitur ex rationibus momenti in C ad momentum in G , & momenti in G ad momentum in H ; jam verò ratio momenti resistentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum ejusdem in G , componitur ex rationibus momenti Cunei in C ad momentum resistentiæ trabis AE , è quâ nascitur, in eodem puncto C , & momenti trabis AE in C ad momentum Cunei in G . Atqui momentum Cunei in C ad momentum Trabis in C , est ut quadratum CN ad quadratum CP seu GQ , id est, (propter Parabolam BNQ) ut linea CB ad lineam GB : Momentum verò trabis in C est ad momentum Cunei Parabolici in G , ut quadratum GB ad rectangulum ACB , (idem enim est momentum resistentiæ Trabis & Cunei in G ,) id est, in ratione linearum GB ad AC plus GB ad CB : Ergo momentum Cunei in C ad momentum ejusdem in G , erit in ratione linearum CB ad GB , plus GB ad AC , plus GB ad CB ; id est, ut linea GB ad AC . Eodem modo ostendetur momentum Cunei in G , esse ad momentum ejusdem in H , ut linea HB est ad lineam AG seu GB : Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum ejusdem in H , componetur ex rationibus linearum GB ad AC & HB ad GB , id est, erit ut linea HB ad lineam AC . Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO SEXTA.

Fig. 5.
Tab. 8.

TERTIÒ si Trabs AE secari intelligatur lineâ Parabolicâ $AKQNB$ cujus vertex sit in Q , axis QG , & amplitudo AB , quâ quidem sectione fiet Solidum $AQBTRS$ quod Parabolicum appellabitur; cujus momentum resistentiæ in C est ad momentum resistentiæ in H , ut rectangulum ACB est ad rectangulum AHB , vel, quod idem est, ut linea CN ad lineam HK .

Etenim, ut suprà ostensum est, ratio momenti illius Parabolici in C ad momentum ejusdem in H , componitur ex rationibus quadrati CN ad quadratum HK & rectanguli AHB ad rectangulum ACB , id est, ex rationibus linearum CN ad HK plus CN ad HK , & rectanguli AHB ad rectangulum ACB : Sed ratio lineæ CN ad HK , eadem est (propter Parabolam) quæ rectanguli ACB ad rectangulum AHB : Ergo ratio momenti resistentiæ Solidi Parabolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H , componetur ex rationibus CN ad HK plus rectanguli ACB ad rectangulum AHB , plus rectanguli AHB ad rectangulum ACB : Sed rationes ACB ad AHB , & AHB ad ACB sese mutuò destruunt: Est ergo momentum resistentiæ Solidi Parabolici in C ad momentum ejusdem in H , ut linea CN ad lineam HK , id est, (propter Parabolam) ut rectangulum ACB est ad rectangulum AHB . Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

ET hinc vides istius Solidi Parabolici momenta proportionem habere inversam momentorum Trabis è quâ enatum est; illius enim momentum in C est ad momentum in H , ut rectangulum ACB ad rectangulum AHB ; hujus verò è contrario momentum

DE LA COUPE DES POUTRES EGALEMENT RESISTANTES. 65
 mentum resistentiæ in C est ad momentum resistentiæ in puncto H, ut rectangulum AHB est ad rectangulum ACB.

PROPOSITIO SEPTIMA.

QUARTO denique secetur Trabs AE per semiparabolam FNKB, cujus axis fit AF & dimidia amplitudo AB; exurgatque Cuneus parabolicus AFKBGOD; in quo momenta resistentiæ longè intricatiorem inter se proportionem sortientur quàm in reliquis. Ostendetur enim ut suprà momentum Cunei in C ad momentum ejusdem in H, esse in ratione compositâ quadrati CN ad quadratum HK, & rectanguli AHB ad rectangulum ACB; Quæ ratio si referatur ad lineam BA seu ad basim Cunei, eadem erit quæ composita rationum quadrati lineæ compositæ ex AC & AB ad quadratum lineæ compositæ ex eadem AB & AH, plus rectanguli sub lineis AH, CB ad rectangulum sub lineis AC, BH.

Sit enim AQ æqualis AB, & erit ex proprietate Parabolæ CN ad HK ut rectangulum QCB ad rectangulum QHB, & ut quadratum CN ad quadratum HK, sic quadratum rectanguli QCB ad quadratum rectanguli QHB, id est, ut lineæ QC ad QH, plus QC ad QH, plus CB ad HB, plus CB ad HB. Sed ratio rectanguli AHB ad rectangulum ACB, eadem est quæ ratio linearum AH ad AC, plus HB ad CB: Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, componetur ex rationibus linearum QC ad QH, plus QC ad QH, plus CB ad HB, plus CB ad HB, plus AH ad AC, plus HB ad CB. Sed rationes CB ad HB, plus HB ad CB sese mutuò destruunt; Relinquuntur ergo rationes QC ad QH, plus QC ad QH, plus CB ad HB, plus AH ad AC; Quæ componunt etiam rationem quadrati QC ad quadratum QH, & rectanguli AH, CB ad rectangulum AC, BH. Sed quadratum QC æquale est quadrato lineæ compositæ ex AB & AC, quadratum verò QH æquale quadrato lineæ compositæ ex AB & AH. Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, componitur ex rationibus quadrati lineæ compositæ ex AB & AC ad quadratum compositæ ex eadem AB & AH, & rectanguli sub lineis AH, CB ad rectangulum sub lineis AC, BH. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

ATQUE ex istis omnibus patet ratio, cur nimiam quam in Galilæum habebas fiduciam experimenta tua deluserint. Tantum enim abest ut illa sectio Parabolica, quocunque tandem modo trabibus secundum altitudinem adhibeatur, æquet in illis utrinque fultis momenta resistentiæ; quin illa potius in infinitum dimovere possit atque diducere; etiamsi id semper verissimum sit tertiam ponderis & molis partem per Parabolas in trabe refecari.

PROPOSITIO OCTAVA.

SED nec ista momentorum æqualium proprietas sectioni hyperbolice conveniet. Nam si trabs AE secetur primò per semihyperbolam ANKR sub transversâ diametro QA, Axe AB, & amplitudine BR, vnde Cuneus hyperbolicus oriatur BANRELSG. Erit momentum resistentiæ in C ad momentum in H, ut est rectangulum sub QC & HB ad rectangulum sub QH & CB. Nam, ut suprà, demonstrabitur momentum in C ad momentum in H esse in ratione compositâ quadrati CN ad quadratum HK, & rectanguli AHB ad rectangulum ACB. Sed ex proprietate hyperboles quadratum CN est ad quadratum HK ut rectangulum QCA ad rectangulum QHA: Ergo momentum est ad momentum in ratione compositâ rectangulorum QCA ad QHA & AHB ad ACB. Sed ratio re-

K k

Et anguli QCA ad QHA eadem est quæ linearum QC ad QH , & AC ad AH ; ratio verò rectanguli AHB ad ACB eadem est quæ linearum AH ad CA , plus HB ad CB : Et ratio AC ad AH destruit rationem AH ad CA : Ergo momentum resistentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H , est in ratione compositâ linearum QC ad QH , plus HB ad CB ; Quæ quidem est ratio rectanguli QC , HB ad rectangulum QH , BC . Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO NONA.

Fig. 8.
Tab. 8.

SI verò idem Prisma AE secetur per duas semihyperbolas contrariè positas AKQ , BNQ , quarum axis communis AB , amplitudo eadem GQ , & transversæ diametri æquales AV , BX , quæ se in trabis medio Q secantes, Solidum in illâ efficiant $AKQNBTRS$ deinceps Cuneatum hyperbolicum. Idem prorsus eveniet quod suprà, eritque momentum resistentiæ in C ad momentum resistentiæ in H , ut est rectangulum sub XC & HB ad rectangulum sub VH & AC . Est enim ratio momenti resistentiæ Solidi deinceps Cuneati hyperbolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H , composita ex rationibus momenti in C ad momentum in G , & momenti in G ad momentum in H . Et ratio momenti in C ad momentum in G componitur ex rationibus rectanguli AGB ad rectangulum ACB , plus quadrati CN ad quadratum GQ , id est, (ex proprietate hyperboles) rectanguli $XC B$ ad rectangulum XGB . Sed ratio rectanguli AGB ad rectangulum ACB , eadem est quæ linearum AG ad AC , plus GB ad CB ; Ratio verò rectanguli $XC B$ ad rectangulum XGB , eadem quæ linearum XC ad XG , plus CB ad GB : Et ratio GB ad CB destruit rationem CB ad GB : Ergo ratio momenti resistentiæ in C ad momentum in G , componetur ex rationibus AG ad AC , plus XC ad XG , quibus etiam componitur ratio rectanguli XC , AG ad rectangulum XG , AC . Eodem modo demonstrabitur rationem momenti resistentiæ in G ad momentum resistentiæ in H , eandem esse quæ rectanguli VG , BH vel XG , BH ad rectangulum VH , AG : Ergo ratio momenti resistentiæ Solidi deinceps Cuneati hyperbolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H , componetur ex rationibus rectangulorum XC , AG ad XG , AC , plus XG , BH ad VH , AG . Sed ista rationum compositio eadem est quæ compositio rationum rectangulorum XC , AG ad VH , AG , plus XG , BH ad XG , AC , id est, (propter communes altitudines AG & XG) eadem quæ compositio rationum linearum XC ad VH , plus BH ad AC : Ergo momentum resistentiæ Solidi deinceps Cuneati hyperbolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H , est in ratione compositâ ex rationibus linearum XC ad VH & BH ad AC , id est, rectanguli XC , BH ad VH , AC . Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO DECIMA.

Fig. 9.
Tab. 8.

QUOD si Trabs AE secetur per integram hyperbolam $AKQNB$ cujus axis sit GQ , transversa diameter QV , & opposita sectio IVZ ; erit adhuc intricatior ratio momenti resistentiæ Solidi hyperbolici $AQBDRY$ in C ad momentum ejusdem in H . Si enim producantur lineæ CN , HK , donec occurrant oppositæ sectioni in Z & I ; demonstrabitur rationem momenti in C ad momentum in H , eandem esse quæ rectanguli sub lineis $I H$, $C N$ ad rectangulum sub lineis $Z C$, $H K$. Nam, ut suprà, ostendetur rationem momentorum componi ex rationibus quadratorum CN ad HK , plus rectangulorum AHB ad ACB . Sed ex proprietate hyperboles rectangulum AHB ad rectangulum ACB , est ut rectangulum $I H K$ ad rectangulum $Z C N$: Erit ergo ratio momenti in C ad momentum in H composita ex rationibus quadrati CN ad quadratum HK , & rectanguli $I H K$ ad rectangu-

DE LA COUPE DES POUTRES E'GALEMENT RESISTANTES. 67
 rectangulum ZCN . Rursus demonstratum est ab aliis idem esse compositum rationum quadrati CN ad quadratum HK & rectanguli IHK ad rectangulum ZCN , quod compositum rationum quadrati CN ad rectangulum ZCN , id est, lineæ CN ad lineam ZC , & rectanguli IHK ad quadratum HK , id est, lineæ IH ad lineam HK : Est ergo ratio momenti resistentiæ Solidi hyperbolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H , composita ex ratione lineæ CN ad ZC , plus ratione lineæ IH ad HK ; quibus etiam componitur ratio rectanguli IH , CN ad rectangulum sub lineis ZC , HK . Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VNDECIMA.

DENIQUE, si Trabs AE per semihyperbolam $FKNB$ secetur, cujus Axis AF , Fig. 10.
 transversa diameter FV , & opposita sectio VIZ , oriaturque alter Cuneus hyperbo- Tab. 8.
 licus $AFNBGLD$; erit intricatissima ratio momentorum resistentiæ ejusdem in di-
 versis punctis C & H . Nam si extendantur lineæ CN , HK , ut in superiori propo-
 sitione, donec occurrant oppositæ sectioni in Z & I , erit ratio momenti resistentiæ Cu-
 nei hyperbolici in C ad momentum ejusdem in H , composita ex rationibus rectanguli
 sub lineis IH & CN ad rectangulum sub lineis ZC , HK , plus rectanguli sub
 compositâ ex tota AB & parte AC in lineam AH , ad rectangulum sub compo-
 sitâ ex eadem AB , & parte AH in lineam AC . Sit AQ æqualis AB , ostendetur, ut
 suprâ, momentum resistentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum ejusdem in H ,
 esse in compositâ quadrati CN ad quadratum HK , & rectanguli AHB ad re-
 ctangulum ACB : Sed ratio quadrati CN ad quadratum HK componitur ex ra-
 tionibus quadrati CN ad quadratum AF , & quadrati AF ad quadratum HK ;
 ratio verò quadrati CN ad quadratum AF componitur rursus ex ratione qua-
 drati CN ad rectangulum ZCN (id est, propter CN communem altitudinem,)
 lineæ CN ad lineam ZC , plus ratione rectanguli ZCN ad rectangulum QCB ,
 id est (ex proprietate hyperboles) rectanguli VAF ad quadratum AB , plus ra-
 tione rectanguli QCB ad quadratum AB , plus ratione quadrati AB ad rectan-
 gulum VAF , & tandem plus ratione rectanguli VAF ad quadratum AF , id est,
 (propter AF communem altitudinem) lineæ VA ad lineam AF : Atqui ratio
 rectanguli VAF ad quadratum AB destruit rationem quadrati AB ad rectangu-
 lum VAF . Superest ergo ut ratio quadrati CN ad quadratum AF componatur
 ex rationibus lineæ CN ad lineam CZ , plus rectanguli QCB ad quadratum AB ,
 plus lineæ VA ad lineam AF ; quibus etiam componuntur rationes rectanguli VA ,
 CN ad rectangulum CZ , AF & rectanguli QCB ad quadratum AB . Eodem argu-
 mento demonstrabitur rationem quadrati AF ad quadratum HK componi ex ra-
 tione rectanguli IH , AF ad rectangulum VA , HK , plus ratione quadrati AB ad
 rectangulum QHB : Ergo ratio quadrati CN ad quadratum HK componetur
 ex ratione rectangulorum VA , CN ad CZ , AF , plus QCB ad quadratum AB ,
 plus quadrati AB ad rectangulum QHB , plus rectanguli IH , AF ad VA , HK ;
 id est, ex rationibus rectangulorum VA , CN ad CZ , AF , plus QCB ad QHB ,
 plus IH , AF ad VA , HK . Sed quod exurgit ex compositione rationum rectangu-
 lorum VA , CN ad CZ , AF , plus IH , AF ad VA , HK , æquale est ei quod exur-
 git ex compositione rationum rectangulorum VA , CN ad VA , HK , id est, (pro-
 pter VA communem altitudinem) lineæ CN ad lineam HK , plus IH , AF ad
 CZ , AF , id est, (propter AF communem altitudinem) lineæ IH ad lineam CZ ,
 quæ quidem faciunt rationem rectanguli IH , CN ad rectangulum CZ , HK :
 Ergo ratio quadrati CN ad quadratum HK componetur ex rationibus rectangulo-
 rum IH , CN ad CZ , HK , plus QCB ad QHB : Ergo ratio momenti resistentiæ
 Cunei hyperbolici in C ad momentum ejusdem in H componetur ex rationibus re-
 ctangulorum IH , CN ad CZ , HK , plus QCB ad QHB , plus AHB ad ACB :
 Sed ratio rectanguli QCB ad QHB eadem est quæ linearum QC ad QH ,
 LI

plus CB ad HB ; ratio verò rectanguli AHB ad ACB eadem quæ linearum AH ad AC , plus HB ad CB . Quæ quidem ratio HB ad CB destruit rationem linearum CB ad HB . Est ergo momentum resistentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum ejusdem in H , in ratione compositâ rationum rectanguli $IHCN$ ad rectangulum $CZH K$, plus linearum QC ad QH , plus AH ad AC , (id est, rectanguli QC , AH ad rectangulum QH , AC), id est, rectanguli sub lineâ compositâ ex AB & AC in AH , ad rectangulum sub compositâ ex eadem AB & AH in lineam AC . Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO DVODECIMA.

Fig. 11.
Tab. 8.

NEQUE etiam ista momentorum æqualitas in Trabe, per quadrantem Circuli aut Ellipseos sectâ, reperietur. Nam si sub semidiametris AF , AB quadrans Circuli aut Ellipseos $FNKB$ describatur, qui secans Trabem AE producat Cuneum circularem aut ellipticum $AFNKBGOD$, sitque tota diameter BQ . Facile ostendetur momentum resistentiæ Cunei in C ad momentum ejusdem in H , esse ut rectangulum sub compositâ ex totâ AB & ex parte AC in AH , ad rectangulum sub compositâ ex totâ AB & ex parte AH in AC . Nam ratio momenti resistentiæ Cunei elliptici seu circularis in puncto C ad momentum resistentiæ ejusdem in puncto H , componitur ex rationibus quadrati CN ad quadratum HK , plus rectanguli AHB ad rectangulum ACB . Sed propter Circulum aut Ellipsim quadratum CN est ad quadratum HK ut rectangulum QCB ad rectangulum QHB : Ergo ratio momenti resistentiæ in C ad momentum in H , componitur ex rationibus rectanguli QCB ad rectangulum QHB , plus rectanguli AHB ad rectangulum ACB , id est, (uti demonstratum est ab aliis) ex rationibus rectanguli QCB ad rectangulum ACB , plus rectanguli AHB ad rectangulum QHB ; id est, (propter communes altitudines CB & HB) ex rationibus linearum AH ad QH , plus QC ad AC ; quæ quidem faciunt rationem rectanguli AH , QC ad rectangulum AC , QH , seu rectanguli sub AH & compositâ ex totâ AB & parte AC , ad rectangulum sub AC & composita ex totâ AB & parte AH . Est ergo momentum resistentiæ Cunei circularis aut elliptici in C ad momentum ejusdem in H , ut rectangulum sub compositâ ex AB & AC in AH ad rectangulum sub compositâ ex AB & AH in AC . Quod erat demonstrandum.

Nunc verò (mi VV.) quanti æstimâris, si quis eam te figuram edoceat, quâ non tertia quidem ponderis & molis portio auferatur, sed illa saltem non exigua, momenta verò resistentiæ ubique in residuo supersint æqualia? Illud puto, gratissimum tibi erit, & tibi in mechanicis atque organicis assidue versanti, opis haud omninò contemnendæ. Sed quantò acceptius id erit tibi atque jucundius, quòd à viro tui amantissimo, & qui te magnopere colit, id continget? Enimverò iis quæ in nos amici conferunt beneficiis, nexu duplici nos obligari par est atque obstringi.

PROPOSITIO DECIMA-TERTIA.

AGE igitur, & quod sectioni parabolicæ, imò & hyperbolicæ, atque quadrantis circuli aut ellipseos, denegavimus; circulari profectò aut ellipticæ meritò concedamus: istæ enim sectiones id prorsus efficient, quod præstare Parabolam Galilæus perperam asseruerat.

Fig. 12.
13. Tab. 8.

Nam si duabus lineis AG vel GB & GQ tanquam semidiametris, describatur semicirculus AQB , si ex sint æquales; vel semiellipsis, si sint inæquales; & per hanc vel illam Trabs AE secundum altitudinem ita secetur, ut fiat Solidum circulare, vel ellipticum $AQBTR S$: Ejus sanè momenta resistentiæ erunt ubique æqualia, & quod pondus frangit in C Solidum utrinque fultum, illud etiam idem rumpet in H . Etenim momentum resistentiæ in C Solidi sive circularis sive elliptici, est ad momentum

DE LA COUPE DES POUTRES EGALEMENT RESISTANTES. 69
momentum resistentiæ ejusdem in H, in ratione compositâ quadrati C N ad quadratum H K, & rectanguli A H B ad rectangulum A C B: Sed propter Circulum aut Ellipsim quadratum C N est ad quadratum H K, ut rectangulum A C B est ad rectangulum A H B: Ergo ratio momenti resistentiæ Solidi in C ad momentum ejusdem in H, componetur ex rationibus rectanguli A C B ad rectangulum A H B, & rectanguli A H B ad rectangulum A C B: Sed istæ rationes faciunt rationem æqualitatis: Ergo momenta in C & H erunt æqualia. Et hoc in omnibus Solidi punctis concludetur, unde patet ubique propositum.

Sic (mi VV.) petitioni tuæ satisfecisse me puto, nisi quod hæc, quam ad te paucis verbis scribere cogitaveram, in ingentem ac penè fastidiosam molem, Epistola creverit. Sed hæc omnia ita exarare oportuit, tum ut rem tibi gratam faciam, si quidpiam boni tibi communicaverim, tum etiam ut habeas, quod amicè me admoneas, si quid minùs cautè scripserim. Quippe non mirum profectò fuerit, iisdem me in grumis scrupisque collabi, in quos ipse Galilæus impegerit. Quare etiam atque etiam te rogo, ad me quamprimùm rescribe quid sentias, factis præsertim eâ quâ solles sedulitate atque solertiâ experimentis. Ego verò non committam posthac ut de meâ negligentia conqueraris. Vale. Datum Farræ Viromanduorum pridie Idus Sexiles A. D. MDC. LVII.

SECOND DISCOURS, OU

LETTRE AV S^r B. POUR LA résolution de ses doutes sur les Propositions du premier Discours.

MONSIEUR. Je vous suis parfaitement obligé du soin que vous avez pris, de me donner part des remarques, qui ont esté faites sur une Lettre, que j'écris il y a quelques années à un de mes Amis en Suede, & dont je vous avois laissé une copie, sur lesquelles il est bien raisonnable que je vous éclaircisse. Et pour y répondre par ordre & ne vous y laisser aucun sujet de douter, je veux premièrement vous faire ressouvenir de ce que vous m'avez fait la grace de marquer, ou faire marquer par vos amis, à la marge de mon écrit, à costé des choses que je n'y avois pas assez clairement expliquées.

La première des remarques est sur la seconde Proposition, où je dis que les moments de la résistance du Coin ou Prisme triangulaire F A B G, que je suppose estre soustenu sur ses deux extrémités A & B, sont entre-eux, comme les rectangles sous les parties alternes de la base A B; c'est à dire, que le moment de la résistance en C est au moment en H, comme le rectangle des parties A H, C B est au rectangle des parties A C, B H. Et pour le démontrer, je me sers de ces termes, que je rapporte en la Langue qu'ils sont écrits, parce que les notes sont aussi Latines:

Sed ratio momenti resistentiæ Cunei in C ad momentum trabis in eodem C, est ex Galilæo, ut quadratum C N ad quadratum C P seu A F, (id est, ut quadratum C B ad quadratum A B,)

componitur enim ex rationibus partium Solidi contentarum in superficiebus C O & C I, quæ sunt inter se ut superficies, id est, (propter communem altitudinem N O, I P,) ut lineæ C N, C P, & ex ratione distantiarum actionis earundem, quæ etiam sunt ut eadem lineæ C N & C P.

Sur quoy dans le texte l'on a tiré des lignes, & fait des petites Croix, ainsi qu'il se voit icy. Et vis-à-vis de la première il est écrit à la marge, *Hoc falsum, est enim ut C N ad C P seu A F, ex Galilæo.* Et à l'endroit de la seconde, *Hoc non consideravit Galilæus, nec debet*

considerari in resistentiâ. Un peu plus bas, où je dis sur la mesme Proposition: Et tandem ratio momenti resistentiæ Trabis in H ad momentum resistentiæ Cunei in eodem H, est ut quadratum H M seu A F ad quadratum HK, il y a à la marge, Falsum ob eandem rationem.

II. La seconde est sur la troisième Proposition, où je dis : *Sed demonstrabitur ut supra momentum Cunei in C ad momentum ejusdem in G, esse in ratione compositâ quadrati lineæ CN ad quadratum lineæ G Q, & rectanguli AGB ad rectangulum ACB.* Il y a à côté, *Falsum, sunt enim ut lineæ ut supra, & sic in sequentibus, quod ubique notandum. Hoc solummodò verum esset, si non solum trabs minueretur secundum unam dimensionem, ut in casibus Galilæi & Censoris, ut patet ex omnibus ejus figuris, sed secundum duas dimensiones: At nullus hunc casum unquam inquisivit.*

III. Dans la quatrième Proposition, où j'explique la difference des momens de la résistance d'un Solide, que j'appelle Coin Parabolique, il y a à la marge : *Hæc & sequentia, in quibus aut dimidium, aut quadrans figuræ datur Trabi, superflua sunt; cum satis pateat, quandoquidem trabs ex utraque extremitate sustinetur æqualiter, debere ex utraque parte trabem, figuram uniformem habere, non verò ex unâ crassam, ex aliâ tenuem. Quare quæ de dimidiâ Parabolâ & Hyperbolâ, quæ de quadrante Circuli aut Ellipseos adducit, inutilia sunt; præterquamquod eodem semper Paralogismo omnia laborant.*

IV. Dans la fixième Proposition, où il est parlé des momens de la résistance d'un Solide, que j'appelle Parabolique, il y a à côté : *Hæc figura suppositis supponendis est ea quam assignare debebant & Galilæus & Censor, abstrahendo scilicet à gravitate trabis, ut in hac omni inquisitione hypotheticâ abstrahi debet, alioquin fit Paralogismus. Multa notanda forent pro reductione ad praxim, si quis hæc aliter quam hypotheticè vellet sumere, secundum enim materiæ diversitatem pleraque falsa invenirentur, & vix ullius usus hoc esse potest, nisi in navibus, & aliis machinis, in quibus levitas considerandâ foret.*

V. A la fin de la douzième Proposition, où je dis : *Nunc verò (mi VV.) quanti æstimeris, si quis eam te figuram edoceat, quâ non tertia quidem ponderis aut molis portio auferatur, sed illa saltem non exigua.* L'on a écrit à côté : *Tertia pars è verâ figurâ auferatur.*

VI. Enfin, lors que je dis dans la dernière Proposition ; que *Momentum in C sive Elliptici sive Circularis Solidi, est ad momentum resistentiæ in H, in ratione compositâ quadrati CN ad quadratum HK & rectanguli AHB ad rectangulum ACB,* il y a encore à la marge, *falsum.* Et où je dis ensuite : *Ergo momenta in C & H erunt æqualia,* il y a encore, *falsum.*

Voilà, Monsieur, les Observations que j'ay trouvées dans l'écrit que vous m'avez renvoyé, & que j'ay marquées par nombres, afin de les sçavoir plus facilement distinguer l'une de l'autre dans le discours. Elles sont véritablement judicieuses & importantes, & si vray-semblables, qu'à moins de s'y appliquer sérieusement, & d'en faire une exacte discussion, il est malaisé de les résoudre, & de se développer de l'embarras qu'elles vous ont produit.

Pour les traiter avec quelque ordre, il paroît que la 1. 2. 5. & 6. sont celles qui contiennent le nœud de la difficulté, sur lesquelles il faudra par conséquent que je m'étende un peu davantage que sur les autres. Car pour la 3. où l'on dit que toutes les Propositions où je parle des Poutres, qui ne reçoivent que la moitié ou le quart de la figure, sont superflues, puis que l'on voit assez que la Poutre étant soutenue par ses deux bouts, doit avoir une figure uniforme, & n'estre pas grosse par une extrémité, & menuë par l'autre ; en sorte que tout ce que j'ay rapporté de la demy-Parabole, de la demy-Hyperbole, & du quart de Cercle, ou d'Ellipse, est absolument inutile.

Il me semble que j'ay quelque droit de dire, que je ne vois pas bien qu'il paroisse si clairement comme vous dites, qu'une Poutre soutenue des deux bouts doive estre de figure uniforme, puis, qu'à mon avis, deux murs se peuvent rencontrer d'une inégale épaisseur, & dont l'un seroit assez fort pour porter le plus gros bout d'une Poutre inégale ; & l'autre plus foible ne pourroit souffrir le poids que d'un

DE LA COUPE DES POUTRES ÉGALEMENT RESISTANTES. 71
d'un plus alégré : Et la question pourroit cependant estre faite sur cette hypothèse ;
Quels seroient les momens de la résistance de cette Poutre , selon la difference de ses
parties ?

Outre qu'ayant esté proposé sous une de ces figures par M. Galilée , sçavoir sous
celle de la demy-Parabole , que j'ay appelée Coin Parabolique ; il estoit bien juste
que je parlasse des veritables proportions des momens de la résistance de ce Solide,
pour faire voir en quoi , & de combien il s'estoit équivoqué dans celles qu'il luy
avoit attribuées.

Joint qu'enfin , si nous en croyons les anciens Maîtres du Métier , c'est faire in-
jure à la dignité des Sciences Speculatives , que de ne mesurer leur estime qu'à l'uti-
lité que les Ouvriers en recoivent , quand ils appliquent à la matière , & avec les
imperfections qui l'accompagnent inseparablement , la subtilité de leur doctrine &
de leurs démonstrations.

Et pour la 4^e remarque , où vous dites que le Solide Parabolique , duquel je
parle dans ma 6^e Proposition , est celuy que nous devons avoir proposé & M. Ga-
lilée & moy ; je n'ay rien à y répondre , puis qu'il paroist que j'y ay satisfait de
ma part en le considerant , & que je ne suis pas responsable des faits de M. Ga-
lilée. Que si l'on dit que nous le devons rapporter tout seul , sans parler aucune-
ment des autres ; je me remets à ce que je viens de dire sur la 3^e Observation ,
& à ce qui sera cy-dessous expliqué sur toutes les autres.

L'on dit ensuite qu'il faut faire abstraction du propre poids du Solide dans tou-
tes mes Propositions , comme dans celle de M. Galilée , puis qu'autrement il y au-
roit Paralogisme. J'en demeure d'accord aussi-bien que M. Galilée , qui s'en est as-
sez fait entendre avant que d'entrer en cette matière , quand il dit : *Quello che ri-
cerca più sottile specolazione è quando astraendo d'alla gravità propria di tali Solidi, ci fusse
proposto di dover investigare , se quella forza à peso che applicato al mezzo d'un Cilindro
sostenuto nelle estremità , basterebbe à romperlo , potrebbe far l'istesso applicato in qualsivoglia
altro luogo più vicino all'una che all'altra estremità.* Et comme je n'ay fait que mar-
cher sur ses pas , j'ay crû que je pouvois librement supposer toute sa doctrine , sans
estre obligé de remplir mon papier de ce qui se trouvoit pleinement expliqué dans
son Livre.

Enfin , sur ce que l'on ajoûte qu'il y auroit beaucoup de choses à remarquer , si
l'on vouloit mettre ces Propositions en pratique , & que la diversité de la matière
y feroit trouver beaucoup de déconte : Comme c'est une plainte qui s'est faite
de tout temps contre les Propositions Mathematiques , que l'imbecillité de la ma-
tière ne peut jamais recevoir ny souffrir avec exactitude ; je me tiens à ce qui y
a esté répondu par les Grands Hommes des siècles passez , & à ce que l'expe-
rience nous enseigne de la perfection des Arts , qui n'ont d'excellence , qu'autant
que leurs Ouvrages se trouvent approcher de plus près de la beauté des Idées , que
les démonstrations de la Theorie ont produites.

Je diray seulement , sur ce que l'on a écrit , que toutes ces meditations ne peu-
vent gueres avoir d'autre usage qu'aux Navires , & aux autres machines mobiles ,
où l'on recherche la legereté : Que cela n'est pas tout-à-fait le sentiment de quel-
ques personnes assez entendues au Bastiment , à qui je me souviens d'avoir ouï di-
re , que si ce n'estoit le ver qui ronge le bois , ils aimeroient beaucoup mieux se
servir de Poutres de sapin , dans les lieux où l'humidité n'est pas à craindre , que de
celles de Chefne , seulement parce que celles-là ne chargent pas tant les murailles
que celles-cy.

Toutes les autres remarques , qui contiennent en effet le nœud de la difficulté ,
& qui sont quasi toutes d'un mesme sens , & fondées sur un mesme principe , di-
sent que les momens de la résistance en un mesme point , tant de la Poutre que
du Solide qui luy est inscrit selon sa hauteur , ne sont pas entre eux , comme les Quar-
rez des lignes perpendiculaires à la base commune , comprises & en l'une & en l'au-

Fig. 5.
Tab. 8.

ainsi que je l'ay rapporté de M. Galilée, mais qu'ils sont seulement dans la raison de ces mêmes lignes ; c'est à dire, que les momens de la Poutre & du Solide Parabolique, par exemple en C, ne sont pas, selon Galilée, comme les Quarrez des lignes CP & CN, mais seulement comme ces mêmes lignes CP & CN: Puisque M. Galilée n'y a aucunement considéré la quantité des parties, qui se doivent separer l'une de l'autre, dans les surfaces CI & CO ; & qu'en cette sorte de résistances, on n'y doit avoir aucun égard. Qu'au reste, cela seroit bon, s'il se faisoit diminution de plus d'une dimension dans ces Solides, & non pas d'une seule, comme il paroît dans toutes mes Figures, personne n'ayant jamais recherché ce qui arriveroit en l'autre cas.

Fig. 1.
Tab. 8.

Sur quoi je dois vous dire premièrement, que quelque soin que j'aye pris de relire mon Galilée, je n'ay pas pû comprendre par aucun de ses raisonnemens, qu'il ait jamais eû la pensée (non pas même dans l'hypothèse, que ses Solides soient fichés par un bout, & que le poids pende librement à l'autre) de dire que les momens de la résistance de la Poutre & d'un Solide inscrit, fussent en un même point entre eux, comme les lignes perpendiculaires à la base commune, comprises en l'un & en l'autre ; Puisque dans la démonstration qu'il fait du Prisme triangulaire, il dit bien que le moment de sa résistance en C est au moment de sa résistance en A, comme la ligne CB est à la ligne BA, ou comme CN est à AF ou CP ; Mais il ne dit pas que le moment de la résistance du Prisme triangulaire en C, soit au moment de la résistance de la Poutre AE au même point C, comme la ligne CN est à la ligne CP.

Fig. 2.
Tab. 8.

Et dans celle qu'il rapporte du Solide Parabolique, il n'a jamais voulu que le moment de sa résistance, par exemple en C, soit au moment de la résistance de la Poutre AE au même point C, comme la ligne CN est à la ligne CP : mais au contraire, que le moment de la résistance du Coin Parabolique en C, est à son moment en A, comme le carré de CN est au carré de AF ou CP ; puis qu'il ne peut pas autrement démontrer que les momens de la résistance en A & C, & par tout ailleurs, sont égaux, s'il ne suppose que la Composition des raisons de la résistance de AD & CO, & de leurs distances, (qui sont entre elles comme les moitez des lignes AF & CN) est égale à la Composition des raisons de la même puissance pendante en B, & agissante tantost avec la distance AB, & tantost avec la distance CB, lesquelles sont entre elles comme les quarrez des lignes AF ou CP & CN.

Je dis même dans l'Hypothèse de M. Galilée, qui veut par sa démonstration qu'en l'une & en l'autre des Figures, le Solide soit fiché dans la muraille par un bout, tantost en A & tantost en C ; & que l'autre extrémité B, à laquelle le poids est attaché, soit toujours libre en l'air, sans estre aucunement soutenuë. Bien loin de l'avoir dit dans l'autre supposition, qui veut que les Solides soient soutenus par les deux extrêmes, & que la puissance agisse entre eux, ou qu'ils soient appuyez en quelque point entre lesdits extrêmes, sur lesquels la puissance fasse son effort : Et dans cette Supposition il n'a jamais rien dit d'approchant sur cette matière.

Je ne sçay pas aussi sur quel fondement l'on a pû dire que M. Galilée n'a jamais considéré dans la résistance les parties qui se doivent separer l'une de l'autre dans les surfaces CI & CO, puis qu'il n'y a rien qu'il ait plus particulièrement expliqué.

Et il faut à ce propos que je vous avertisse en passant d'une difficulté qui se rencontre dans son premier Livre, où voulant enseigner une manière tout-à-fait ingénieuse, pour sçavoir la mesure de la plus grande longueur à laquelle les Verges ou Cylindres de toutes sortes de grosseur & de matière, se peuvent étendre sans se rompre d'eux-mêmes.

Pigli si (dit-il) per essem pio un fil di rame di qualsivoglia grossezza & lunghezza, è fermato un de i suoi capi ad alto, si vadia aggiugnendo all' altro maggior & maggior peso, si che

si che finalmente si strappi, è sia il peso massimo che potesse sostenere V.G. cinquanta libre. E' manifesto che cinquanta libre di rame oltre al proprio peso, che sia per essemplio un ottauo d'oncia, tirato in filo di tal grossezza, sarebbe la lunghezza massima del filo che se stesso potesse reggere. Misurisi poi quanto era lungo il filo che si strappò, è sia V.G. un braccio. E' perche peso un ottauo d'oncia, è resse se stesso è cinquanta libre appresso che sono ottauu d'oncia quattro mila ottocento : Diremo tutti i fili di rame di qualunque sia la lor grossezza, potersi reggere sino à la lunghezza di quattro mila ottocento è un braccio, è nò più.

La difficulté consiste, en ce qu'il ne se voit pas bien clairement qu'il ait dû, d'une experience singulière, sur un fil d'une grosseur déterminée, tirer une conséquence si générale qu'il a faite par ces mots, *Diremo tutti i fili di rame, &c.* Ce qui est pourtant véritable, parce que tous ces fils ou Cylindres estans de même longueur, ils sont entre eux comme leurs bases, & partant les poids qui sont entre eux comme les Cylindres seront en la même raison de leurs bases; mais les résistances sont aussi en même proportion des bases; donc les poids & les résistances seront en même raison, & les poids seront à leur résistance, chacune à la sienne, en même proportion: Mais l'un de ces poids est supposé égal à sa résistance par la construction; Donc tous les autres poids seront aussi égaux à la résistance de leurs Cylindres, prise en la manière qu'ils se répondent l'un à l'autre.

Mais laissant ce discours, qui sera beaucoup mieux éclairci dans la suite, il faut maintenant venir au fait, & vous bien faire connoître deux choses; la première, que j'ay eû juste sujet de dire que M. Galilée a pû s'estre laissé surprendre, non pas en démontrant, selon son hypothèse, que les momens de la résistance de son Solide Parabolique en tous ses points sont égaux, & que ce qui reste de la Poutre après que ce Solide en est osté, fait justement la troisième partie de la Poutre; mais en ce qu'ayant fort bien démontré l'une & l'autre de ces deux propriétés dans un Solide fiché par un bout & l'autre libre, il a crû qu'il pouvoit en attribuer la première au même Solide lors qu'il seroit soutenu par ces deux bouts.

L'autre, que j'ay légitimement démontré les véritables propriétés des Solides, que j'ay considerez dans mon Livre, & que je n'ay fait aucun Paralogisme, quand j'ay supposé de la doctrine de M. Galilée, que les momens de la résistance du Solide inscrit & de la Poutre en un même point, lorsque l'un & l'autre estoient soutenus par les deux bouts, sont entre eux comme les quarez des lignes perpendiculaires à leur base commune, comprises en l'un & en l'autre.

Et pour vous ôter tout scrupule sur ces deux choses, il faudra vous rapporter plusieurs passages du Livre de M. Galilée, afin que vous n'ayez pas la peine de les y aller chercher, & vous entretenir un peu au long de sa doctrine, & de ses Propositions sur le sujet present de la résistance des Solides.

Il tire donc ses premières Idées de la confusion où se trouvent ordinairement les Ouvriers, qui ne rencontrant pas dans les grandes Machines, des effets proportionnez à ceux que les petites Machines, semblables aux premières, ont accoustumé de produire; & voyant au contraire que les plus vastes, & celles, dont les pièces qui la composent, sont de plus grande étendue, ont beaucoup moins de force pour résister aux insultes des accidens du dehors, à proportion que les plus petites & celles dont les membres sont plus resserrez, quoy qu'ils soient entre eux en la même raison que les parties des plus grandes; Ils en rapportent la cause à l'inégalité de la matière, & à l'imperfection de l'Art, comme si des causes si foibles pouvoient suffire à la production des effets si differens, & d'une si énorme difformité.

Mais M. Galilée considerant la chose d'une autre manière, & après une meditation, comme il dit de plusieurs années, a crû à la fin en avoir trouvé les véritables raisons; & argumentant à la façon des Geometres, & sur les anciens principes de la Mechanique, il est le premier qui ait fait connoître, que les résistances des Solides, c'est à dire, la force qu'ils ont d'eux-mêmes à soutenir leur propre

poids, & résister à la violence des coups du dehors, ne marchent pas entre elles avec les mêmes proportions que les Gravitez des mêmes Solides : & que celles-cy s'augmentant en la raison, & à mesure que les corps pesans d'une même matière s'agrandissent; la résistance au contraire suivoit une bien moindre proportion, & elle se trouvoit beaucoup affoiblie dans les grands corps, & bien moins capable de soutenir des efforts, qu'elle n'estoit à proportion dans les moindres.

- Je serois trop long, si je voulois vous raconter tout ce qu'il a admirablement écrit sur cette matière: aussi je me contenteray de vous rapporter ce qui fait à mon sujet, & vous dire premièrement; Que supposant, par exemple, un Cylindre attaché en haut par un de ses bouts, & un poids pendant à l'autre, qui-soit petit à petit augmenté de telle sorte qu'il devienne à la fin assez fort pour rompre le Cylindre: Ce poids que j'ay supposé le plus grand de tous ceux que le Cylindre puisse soutenir sans se rompre, joint au propre poids du Cylindre, s'appelle par M. Galilée, *La mesure de la résistance absolue de ce Cylindre*, laquelle consiste en la tenacité & attachement des parties contenues dans les surfaces qui se doivent séparer l'une de l'autre par la rupture, & en l'effort que chacune fait en particulier pour demeurer liée & adhérente à ses voisines.
- A.

- En suite il dit, que si un Cylindre ou Prisme est fiché par un bout perpendiculairement dans une muraille qui soit à plomb, & qu'à son autre bout on attache le plus grand poids qu'il puisse soutenir sans se rompre, (faisant abstraction de la propre Gravité du Cylindre) ce poids s'appelle, *La mesure du moment de la résistance du Cylindre en cette position*; & la résistance absolue est à ce moment de la résistance, comme la longueur du Cylindre est à la moitié du diamètre de la base.
- B.

Fig. 14.
Tab. 8.

- De plus, pour démontrer que les momens de la résistance des Prismes ou Cylindres de même longueur & de différente grosseur, comme A & B, fchez, comme il a esté dit cy-dessus, dans une muraille, sont entre eux comme les Cubes des diamètres de leurs bases CD, EF, il se fert de ces mots : *Imperò che se consideriamo l'affoluta è semplice resistenza che risiede nelle basi, cioè ne i cerchi EF, C D; all'essere strappati facendogli forza col tirargli per dritto, non è dubbio che la resistenza del Cilindro B è tanto maggiore che quella del Cilindro A, quanto il cerchio EF è maggiore del C D, perche tanto più sono le fibre, i filamenti & le parti tenaci che tengono unite le parti de i solidi. Mà se consideriamo che nel far forza per trauerlo ci serviamo di due leue, delle quali le parti à distanze doue si applicano le forze sono le linee DG, FH; i sostegni sono ne i punti D F: Mà le altre parti à distanze doue son poste le resistenze, sono i semidiametri de i cerchi D C, E F; perche i filamenti sparsi per tutte le superficie de i cerchi, è come se tutti si ridussero ne i centri. Considerando, dico, tali leue, intenderemo la resistenza nel centro della base E F contro alla forza di H, essere tanto maggiore della resistenza della base CD contro alla forza posta in G, (è sono le forze in G & H di leue eguali DG, FH) quanto il semidiametro FE è maggiore del semidiametro DC : Cresce dunque la resistenza all'essere rotta nel Cilindro B sopra la resistenza nel Cilindro A, secondo amendue le proportioni de i cerchi E F, D C & de i lor semidiametri, &c. c'est à dire, en raison triplée des diamètres.*
- C.

Ce que j'ay bien voulu vous rapporter tout au long, pour faire voir que M. Galilée a toujours considéré dans les momens de la résistance des Solides, & les parties contenues dans les surfaces qui doivent estre séparées, & la distance de leur action ; ne voulant pas m'arrester presentement à vous expliquer à fonds cette proposition, qui prise en un sens & crûement, est paralogistique ; me réservant à vous en entretenir plus au long une autrefois, d'autant plus volontiers, que cette réflexion ne fait rien du tout à nostre sujet.

Monsieur Galilée rapporte par après quantité de merveilleuses propriétés des Cylindres de toutes sortes de grosseur & de longueur, égaux & inégaux, semblables & dissémbles; & toujours dans la même hypothese, qu'ils soient attachés par un bout à un mur, & que l'autre s'étende librement en l'air, sans estre soutenu d'aucune chose.

DE LA COUPE DES POUTRES EGALEMENT RESISTANTES 75

Après quoy il entre en une autre considération à leur égard; & recherchant ce qui arrive aux Cylindres soutenus sur les deux bouts, ou sur un point pris entre les extrémités, il dit: *Che il Cilindro che gravato dal proprio peso sarà ridotto alla massima lunghezza oltre alla quale più non si sosterrrebbe, è sia retto nel mezzo da un sol sostegno,* D.
ò verò di due nell'estremità potrà esser lungo il doppio di quello che sarebbe fitto nel muro, cioè sostenuto in un sol termine. Il che per se stesso è assai manifesto, perchè se intenderemo del Cilindro ch'io segno ABC, la sua metà AB essere la somma lunghezza potente à sostenersi Fig. 15.
stando fissa nel termine B, nell'istesso modo si sosterrà se posita sopra il sostegno G sarà contrapessata d'all'altra sua metà BC. E' similmente se del Cilindro DEF la lunghezza sarà tale, che solamente la sua metà potesse sostenersi fissa nel termine D, è in conseguenza l'altra EF fissa nel termine F, è manifesto che posti i sostegni HI sotto le estremità DF, ogni momento che si aggiunga di forza ò di peso in E, quivi si farà la rottura. Tab. 8.

Et passant outre par ses meditations, il recherche, en faisant abstraction du propre poids des Cylindres, quelle proportion les puissances ont entre elles, qui peuvent rompre les Cylindres, appuyez sur les deux extrêmes & faisant leur effort sur le milieu, ou sur un autre point qui soit plus proche d'un bout que de l'autre. Sur quoy il démontre que ces puissances, qu'il appelle autrement les momens de la résistance du Cylindre, sont entre elles en proportion reciproque des rectangles E.
 faits des parties du costé, contenuës entre les extrémités & le point où les puissances agissent; c'est à dire, qu'au Prisme ou Cylindre AB, soit qu'il soit soutenu tantost en C, & tantost en D, & que la puissance agisse des extrêmes A & B; soit qu'il soit soutenu sous ses extrêmes A & B, & que la puissance fasse ses efforts tantost au point D, tantost en C; le moment de la résistance en D est au moment de la résistance en C, comme le rectangle ACB est au rectangle ADB. Figures 16. 17. Tab. 8.

D'où il paroist, dit-il, qu'en tout Prisme ou Cylindre, le moment de la résistance qu'il a dans son milieu, est le moindre de tous, & que ces momens s'augmentent toujours à mesure qu'ils s'éloignent du milieu, & qu'ils approchent de l'un ou de l'autre des extrêmes, & que *nelle travi grandissime è gravi se ne potrebbe levar nò piccola parte verso l'estremità con notabile alleggerimento di peso, che ne i trauamenti di grandi stanze, sarebbe di comodo è utile non piccolo. E' bella cosa sarebbe il ritrouar quale figura deurebbe hauer quel tal solido, che in tutte le sue parti fusse egualmente resistente, tal che nò più facile fusse ad essere rotto da un peso che lo premesse nel mezzo che in qualsiuoglia altro luogo.* F.

Après quoy il dit immédiatement, que comme il a démontré que la résistance du Prisme Quadrangulaire DB dans son extrémité AD contre une force agissante en B, est à sa résistance en CI contre la même puissance en B, comme la ligne CB est à la ligne AB, c'est à dire, comme CN est à AF. Et qu'au Prisme Triangulaire inscrit FABGD, la résistance en AD contre la force en B, est (ainsi qu'il le démontre en ce même endroit) à sa résistance en CO contre la même force en B, comme la ligne AB est à CB, ou comme AF est à CN: *Habbiamo dunque (dit-il) nel traue ò Prisma DB leuatone una parte, cioè la metà segandolo diagonalmente, è lasciato il Cuneo ò Prisma triangolare FBA; è sono due solidi di conditioni contrarie, cioè quello tanto più resiste quanto più si scorcia, è questo nello scorcarsi perde altrettanto di robustezza. Ora stante questo par ben ragionevole, anzi pur necessario che se gli possa dar un taglio, per il quale togliendo via il superfluo rimanga un solido di figura tale, che in tutte le sue parti sia egualmente resistente.* Fig. 1. Tab. 8.

Et puis il démontre fort bien en suite, que si la Poutre DB est coupée par une ligne Parabolique FNB, qui fasse le Solide inscrit FABG, sa résistance en AD contre la force en B, sera égale à la résistance en CO contre la même puissance en B, & ainsi par tout ailleurs. *Di qui si vede, dit-il, come con diminuzione di peso di più di trenta trè per cento, si posson fare i trauamenti senza punto diminuir la loro gagliardia, il che ne i nauigli grandi in particolare per reggere le coperte puo essere d'utile non piccolo, atteso che in cotali fabriche la legerezza importa infinitamente. Sagr. Le utilità son tante che lungo ò impossibil sarebbe il registrarle tutte.* Fig. 2. Tab. 8.

Ce sont-là les passages du Livre de M. Galilée, dont j'avois besoin pour mon sujet, que j'ay cottez par lettres Capitales, & d'où vous pouvez facilement connoître qu'il a crû que les Poutres & les Solides triangulaires, dont il a recherché les propriétés, devoient estre soutenus par les deux extrêmes, & souffrir l'effort des puissances pressantes sur différentes parties entre les bouts, puisque les textes cottez F & H vous empêcheront d'en douter, aussi-bien que tout le raisonnement qui les précède.

Fig. 1.
Tab. 8.

Et que néantmoins dans la démonstration qu'il en a faite, il les a absolument supposé fchez par un bout & libres par l'autre, puisqu'il dit clairement, que dans le Prisme DB la résistance en AD contre une force en B, estoit à la résistance en CI contre la même puissance en B, comme la ligne CB est à la ligne AB. Ce qui dans cette hypothèse peut estre démontré de cette manière : Et supposé ce qui a esté enseigné par d'autres ; Que si deux raisons ont un même antecédent, elles seront entre elles comme reciproquement les termes conséquens. Maintenant, la résistance estant la même dans les surfaces AD & CI ; les raisons de la résistance AD contre une force en B agissante avec la distance AB, & de la résistance CI contre la même force en B agissante avec la distance CB, auront un même antecédent, sçavoir cette résistance AD ou CI ; & partant elles seront entre elles comme reciproquement les termes conséquens ; c'est à dire, que la résistance AD contre une force en B, sera à la résistance CI contre la même force en B, comme la force en B agissante avec la distance CB, est à la même force en B agissante avec la distance AB. Mais comme dans ces momens la force est la même, ils seront comme les distances de leur action, c'est à dire, comme la ligne CB à la ligne AB : Donc la résistance en AD contre une force en B, sera à la résistance en CI contre la même force en B, comme la ligne CB est à la ligne AB.

Fig. 1.
Tab. 8.

Que si quelqu'un vouloit soutenir avec opiniastrété, que M. Galilée a supposé dans la démonstration que le Prisme DB fut soutenu par ses deux extrêmes, il ne faudra que prendre un autre point comme H, & dire en cette manière : Le moment de la résistance en C du Prisme DB, est au moment du même Prisme en A, comme AB est à CB par l'hypothèse de la démonstration de M. Galilée ; & par la même raison le moment en A est au moment en H, comme la ligne HB est à AB : Donc par égalité le moment de la résistance en C du Prisme DB soutenu sur ses deux bouts, sera au moment en H, comme la ligne HB est à CB. Mais par une autre démonstration cottee cy-dessus par la lettre E, il a fait voir dans la même hypothèse que la résistance du Prisme DB en C estoit à la résistance en H, comme le rectangle AHB est au rectangle ACB : Donc le rectangle AHB fera au rectangle ACB comme la ligne HB est à la ligne CB ; ou, en prenant AC pour hauteur commune, comme le rectangle AC, HB au rectangle ACB : & par conséquent le rectangle AC, HB fera égal au rectangle AHB, & la ligne AC égale à la ligne AH, la partie au tout. Ce qui est absurde.

J'ay donc eû raison de dire que la démonstration de M. Galilée ne convient pas à sa supposition ; & qu'encore qu'il eût fort bien démontré que certaines propriétés appartiennent aux Solides fchez par un bout, & libres par l'autre, il n'a pas eû pour cela aucun droit de dire qu'elles deüssent estre énoncées des mêmes Solides qui seroient soutenus par les deux bouts.

Pour la solution de l'autre difficulté que j'ay gardée pour la dernière, parce que c'est celle de laquelle il paroît que l'on doute le plus, puis qu'en toutes les propositions où elle est supposée, l'on la traite de faux & de paralogisme. Je veux dire, pour démontrer que les momens de la résistance en un même point de la Poutre & du Solide, qui luy est inscrit selon sa hauteur, sont entre eux comme les quarez des lignes perpendiculaires sur leurs bases communes, qui sont comprises en l'une & en l'autre, c'est à dire, comme les quarez de leurs hauteurs au même point.

DE LA COUPE DES POUTRES EGALEMENT RESISTANTES. 77

Il faut premièrement se souvenir, ainsi qu'il est dit dans le discours cotté cy-dessus par la lettre B, que la résistance absolüe d'un Prisme fiché perpendiculairement par un de ses bouts dans un mur, est au moment de la résistance du même Prisme en cette situation, (faisant abstraction de la Gravité) comme la longueur du Prisme est au demidiametre de sa base.

Secondement, Que les résistances absolües des Solides semblables & de même matière, sont entre elles comme leurs bases; comme il est dit au discours cotté A.

Troisièmement, Qu'un Cylindre ou Prisme, au texte cotté D, reçoit les mêmes propriétés pour sa résistance, soit qu'il pose sur ses extrêmes & que la force agisse en differens endroits entre les bouts, ou qu'il s'appuie en quelque part entre les bouts & que la puissance fasse son effort sur les extrêmes; puisque c'est de cette sorte que M. Galilée l'a entendu, & qu'il s'en est clairement expliqué dans les discours rapportez cy-dessus au même texte D.

Joint que sa proposition, par laquelle il démontre au texte cotté E, que les momens en D & C du Prisme ou Cylindre AB, aux extrémités duquel A & B, les poids ou puissances agissent, & qui est appuyé tantost en D, tantost en son milieu C, sont entre eux comme le rectangle ACB est au rectangle ADB: Cette proposition, dis-je, se peut aussi, suivant son même raisonnement, démontrer dans l'autre hypothèse, qui veut que le Prisme ou Cylindre soit soutenu en A & B, & que les poids & les puissances agissent tantost en D, tantost en C: Car supposant le poids F, qui est égal à la résistance en D, estre divisé en deux parties I & H, de telle sorte que I soit à H, comme la ligne DB est à la ligne DA, (afin que le poids I soit égal au moment de la résistance du Prisme AD fiché en A, & le poids H égal au moment de la résistance du Prisme DB fiché en B); & le poids E, qui est égal à la résistance en C, estre divisé en deux moitiés, dont l'une soit G; le poids E sera au poids F, c'est à dire, la résistance en C à la résistance en D, en raison composée du poids E au poids G, du poids G au poids H, & du poids H au poids F. Mais le poids E est au poids G, comme la ligne AB est à CB; le poids G est au poids H, comme la ligne DB est à CB; & le poids H est au poids F, comme la ligne AD est à AB: Donc le poids E sera au poids F, en raison composée de la ligne AB à la ligne CB, de la ligne DB à la ligne CB, & de la ligne AD à la ligne AB: Mais les raisons des lignes AD à AB & AB à CB, sont égales à la raison de la ligne AD à CB: Donc la raison du poids E au poids F, ou du moment en C au moment en D, sera composée des raisons de AD à CB & de BD à CB; c'est à dire, comme le rectangle ADB au quarré CB, ou au rectangle ACB.

Quatrièmement, Il est bon de prendre garde qu'en matière de résistance des Solides, où l'on fait abstraction de leur propre gravité, la variété de leurs figures ne fait effet qu'en tant qu'elles déterminent plus ou moins la distance de l'action de la puissance qui agit contre la résistance, & la grandeur de la surface où se doit faire la rupture, laquelle contient plus ou moins de parties, qui se doivent separer. Je veux dire, que dedans le Solide ABE, le moment de la résistance en C, n'est aucunement alteré, quelque irregularité de figure que l'on donne au Solide, comme celle de APXB; pourveu que le point C, soit toujours en tous les cas, distant en la même manière des extrêmes A & B, & que la surface CPI, qui contient les parties qui doivent estre divisées l'une de l'autre, soit toujours la même. Et cela est à mon avis assez facile à comprendre, puisque des deux choses, en quoi les Solides sont differens l'un de l'autre, comme sont leurs formes ou figures & leurs propres poids, l'une n'entre point en consideration dans les momens de la résistance, & il est fait abstraction de l'autre. Et les deux choses au contraire sur qui roulent toutes les raisons des résistances, c'est à dire, la longueur des leviers, & la quantité & situation des parties résistantes, dans les surfaces où la rupture se doit faire, y demeurent égales, ou plutôt les mêmes en tous les cas.

Fig. 16.
Tab. 8.

Fig. 17.
Tab. 8.

Fig. 18.
Tab. 8.

En sorte que l'on pourra facilement juger, que pour déterminer le moment de la résistance en C du Solide difforme APXB, il suffira de faire connoître celui du Prisme AE au même point C, dont la longueur AB est commune, aussi-bien que la surface CPI, qui est perpendiculaire à la ligne AB, & où se doit faire la rupture sur le point C.

Fig. 19.
Tab. 8.

Cinquièmement, Puisque par le discours de M. Galilée cotté cy-dessus D, il paroît qu'un Prisme, soutenu par ses deux bouts ou seulement en son milieu, & qu'on suppose étendu jusqu'à sa plus grande longueur, sans qu'il se rompe de son propre poids, est le double de celui, qui n'estant fiché que par un bout, fera aussi alongé autant qu'il se peut sans se casser. Comme si le Prisme AB, soutenu sur son milieu C, est supposé estre étendu en sa plus grande longueur, sans qu'il se rompe en cette situation; il est, dit M. Galilée, le double du Prisme CB, qui attaché par un de ses bouts en C, fera aussi étendu autant qu'il le puisse estre pour se soutenir: Puisqu'en cette hypothese le contrepoids que fait toute la partie AC pour tenir en équilibre le Prisme CB, fait à son égard le même effet que si le susdit CB estoit fiché dans le mur en C, ne pouvant pas se mouvoir sur le point C, tant en l'un qu'en l'autre cas, sans se rompre.

Maintenant, si nous prenons la moitié du costé CB comme CE, & faisant abstraction de sa propre Gravité, que nous supposérons estre entièrement ostée; si nous appliquons en E le poids I, qui soit égal à toute cette gravité du Cylindre CB; il est constant qu'il fera le même effet qu'auparavant: Et si prenant tout autre point comme D, nous y mettons le poids K, qui soit au poids I, comme la ligne CE est à la ligne CD; il est encore manifeste que les choses demeureront au premier estat, & que le poids K agissant en D avec la distance CD, sera égal à la résistance du Prisme CD contenuë dans la surface CP, soit que le Prisme CD soit fiché dans le mur en C, soit qu'il soit arrêté sur le point C par le Prisme CA qui luy contrepese: Et que si l'on prend la ligne CF égale à CD, & le poids L égal à K, après avoir aussi fait abstraction de la propre Gravité du Prisme CA & CF, il arrivera encore la même chose: Et par conséquent, comme le poids K est la mesure du moment de la résistance du Prisme DC attaché en C, les deux poids égaux K & L seront aussi la mesure du moment de la résistance du Prisme FD appuié en C, lorsque les puissances sont en D & F, ou appuié en D & F, lorsque la puissance est en C.

Or est-il que, par la proposition de M. Galilée que nous avons rapportée cy-dessus sous la lettre B, la résistance absolue, qui est la même aux Prismes FD & CD, est au moment de la résistance du Prisme CD, comme la ligne CD est à CG demidiametre de la base; & le moment de la résistance du Prisme CD, est au moment du Prisme ou Cylindre FD, comme la ligne CG est à la ligne CP, (le moment de CD égal au poids K, estant la moitié du moment de FD qui est égal aux deux poids K & L, comme CG demidiametre de la base est la moitié du diametre CP:) Donc, par égalité, la résistance absolue sera au moment de la résistance du Prisme FD soutenu en C, comme la ligne CD est au diametre CP. Ce qu'il faut remarquer.

Fig. 20.
Tab. 8.

Voyons à présent ce qui arrive aux Prismes de même longueur & largeur, & qui ne different qu'en leur hauteur: C'est à dire, pour me servir de vos termes, dans lesquels il ne se fait diminution que d'une seule dimension: Comme ABFE & ABQL, dont les longueur AB & largeur PI ou NO sont égales, mais les hauteurs CP & CN sont inégales: Je dis que le moment de la résistance du Prisme AE dans son milieu C, est au moment du Prisme AL dans le même point C, en même raison que le carré de la ligne CP est au carré de la ligne CN. Car la raison du moment de la résistance en C du Prisme AE, au moment de la résistance en C du Prisme AL, est composée des raisons du moment en C du Prisme AE à sa résistance absolue, de la résistance absolue du Prisme AE à la résistance absolue du Prisme

Prisme AL, & de la résistance absolue du Prisme AL au moment de sa résistance en C: Mais il vient d'être enseigné cy-dessus, que le moment de la résistance en C du Prisme AE est à sa résistance absolue, comme le diamètre CP est au côté CB; & la résistance absolue du Prisme AE, par ce qui a été cy-dessus rapporté de M. Galilée sous la lettre C, à la résistance absolue du Prisme AL, comme la surface CI est à CO, c'est à dire, comme la ligne CP est à CN; & la résistance absolue du Prisme AL est au moment de sa résistance en C, comme le côté CB est au diamètre de la base CN. Donc la raison du moment de la résistance en C du Prisme AE, au moment en C du Prisme AL, sera composée des raisons du diamètre CP au côté CB, de la ligne CP à la ligne CN, & du côté CB au diamètre CN: Mais les raisons de CP à CB & CB à CN sont égales à la raison de CP à CN. Donc la raison du moment AE en C au moment de AL en C, sera composée des raisons de la ligne CP à CN & CP à CN, c'est à dire, comme le carré de CP au carré de CN.

Je dis bien davantage; que si l'on prend quelque'autre point que ce puisse être comme H, le moment de la résistance du Prisme AE au point H, sera encore au moment de la résistance du Prisme AL au même point H, comme le carré de HM ou CP au carré de HK ou CN. Car la raison du moment de la résistance du Prisme AE au point H, au moment de la résistance du Prisme AL au même point, est composée des raisons du moment de AE en H, au moment du même AE en son milieu C; du moment du Prisme AE en C, au moment du Prisme AL au même point C; & du moment du Prisme AL en C, au moment du même Prisme AL au point H. Mais le moment de la résistance du Prisme AE au point H, est au moment du même Prisme AE en C, comme le rectangle ACB est au rectangle AHB; le moment de la résistance du Prisme AE en C, est au moment du Prisme AL en C, comme le carré du diamètre PC, est au carré du diamètre CN; & le moment de la résistance du Prisme AL en C, est à son moment en H, comme le rectangle AHB au rectangle ACB. Donc la raison du moment de la résistance du Prisme AE en H, au moment de la résistance du Prisme AL au même point H, sera composée des raisons du rectangle ACB au rectangle AHB, du carré PC au carré CN, & du rectangle AHB au rectangle ACB. Mais la raison de ACB à AHB détruit celle de AHB à ACB. Il ne reste donc plus que la raison du carré PC au carré CN ou du carré HM au carré HK, à laquelle soit égale la raison du moment de la résistance du Prisme AE au point H, au moment de la résistance du Prisme AL au même point H.

Maintenant, si l'on entend un Solide, quel qu'il puisse être, comme l'un de ceux que nous avons considéré AKPBRIS, qui soit inscrit dans la Poutre AE, en sorte qu'il soit de même longueur & largeur qu'elle, & qu'il passe par le point K, par où il faut s'imaginer une autre Poutre AL; il paroît par les choses démontrées cy-dessus, que le moment de la résistance de ce Solide inscrit au point H, est le même que le moment de la Poutre AL au même point; lequel étant au moment de la Poutre AE au point H, en la raison du carré de HK au carré de HM; il s'ensuit que le moment de ce Solide inscrit en H, est au moment de la Poutre AE au même point, comme le carré de HK à HM ou de CP à CN, & non pas en même raison que les lignes CP & CN, comme vous l'avez marqué. Et que je n'ay point fait de Paralogisme, quand sur cette proportion j'ay conclu que les momens des Solides Paraboliques, en quelque manière qu'ils soient inscrits dans la Poutre selon sa hauteur, ne sont point égaux entre eux; & que ceux du Demicercle & de l'Ellipse le sont en tous leurs points.

Je dis des Solides Paraboliques inscrits dans la Poutre selon sa hauteur, parce que la même Poutre peut être coupée par une ligne Parabolique selon sa largeur, en sorte qu'étant soutenue par les deux bouts, les momens de la résistance soient

Fig. 20.
Tab. 8.

Fig. 21.
Tab. 8.

égaux en toutes ses parties. Comme si la Poutre AE est coupée sur sa largeur GE par une Parabole GIF, dont l'axe soit la même largeur PI, le sommet I & l'amplitude toute la longueur de la Poutre GF, & qui fasse, dans la Poutre, le Solide Parabolique GIFBOA de même hauteur & longueur qu'elle.

Je dis que les momens de la résistance de ce Solide Parabolique soutenu sur ses extrêmes A & B, sont par tout égaux; c'est à dire, que si ce Solide est rompu par une puissance ou un poids, agissant au point M ou H, il sera rompu par la même puissance ou le même poids, qui fera effort au point P ou C; & ainsi des autres.

Parce que le moment au point H du Solide Parabolique, est à son moment au point C, en raison composée de la raison du moment du Parabolique en H, au moment de la Poutre AC au même point H; de la raison du moment de la Poutre en H, à son moment en C; & de la raison du moment de la Poutre en C, au moment du Parabolique au même point C: Mais la raison du moment de la résistance du Solide Parabolique au point H, au moment de la Poutre AE au même point H, est la même que celle des parties du Solide, qui se doivent séparer dans la surface HN, aux parties contenues dans la surface de la Poutre HK; c'est à dire, comme la même surface HN, est à la même surface HK, ou comme la ligne MN à MK ou PI (à cause que les surfaces HN & HK ont une même hauteur HM:) Et la raison du moment de la Poutre en H, à son moment en C, est la même que celle du rectangle ACB au rectangle AHB; & la raison du moment de la Poutre en C, au moment du Solide Parabolique au même point C, est celle d'égalité; puisque c'est le même moment en l'un & en l'autre, par ce qui a été dit cy-dessus. Et partant le moment de la résistance du Solide Parabolique en H, au moment du même Solide au point C, fera en raison composée des raisons de la ligne MN à la ligne PI, & du rectangle ACB au rectangle AHB. Mais par la propriété de la Parabole la ligne MN est à la ligne PI, comme le rectangle AHB est au rectangle ACB: Donc le moment de la résistance du Solide Parabolique au point H, fera au moment de la résistance du même Solide au point C, en raison composée de celles du rectangle AHB au rectangle ACB, & du rectangle ACB au rectangle AHB, c'est à dire, en raison d'égalité. Et la même chose pouvant être conclue de la même manière en tous les points de la base AB, il s'en suit que les momens du Solide Parabolique sont égaux, en quelque point que la puissance ou le poids agissent.

Fig. 22.
Tab. 8.

La même chose se peut encore démontrer d'un autre Solide Parabolique double, CRXQDPSO, qui sera fait dans la Poutre AE, si sa largeur GE est coupée par les deux Paraboles opposées en dedans DPS & DOS, dont les sommets sont aux points P & O, l'axe PO commun, aussi bien que l'amplitude de DS; parce qu'en ce cas, & supposé que ce Solide soit soutenu par ses extrêmes Q & R: Je dis que les momens de sa résistance sont par tout égaux.

Car si l'on entend que la puissance agisse au point K ou H, & puis au point N ou C; le moment de la résistance du double Parabolique en H, fera à son moment en C, en raison composée du moment du Parabolique en H, au moment du Prisme AE au même point H ou I; du moment du Prisme en I, à son moment en C; & du moment du Prisme en C, au moment du Parabolique au même point C. Mais la raison du moment du Solide Parabolique au point H, au moment de la Poutre AE au même point H ou I, est la même que celle de la surface HL à la surface IM, c'est à dire, (à cause de la commune hauteur FH) de la ligne HT ou FL à la ligne ZM ou PO; & la raison du moment de la Poutre AE en I à son moment en C, est la même que celle du rectangle ACB au rectangle AIB, c'est à dire, du rectangle DNS au rectangle DKS; & enfin la raison du moment de la Poutre en C, au moment du Solide Parabolique au même point C, est la raison d'égalité: Et partant la raison du moment de la résistan-

DE LA COUPE DES POUTRES ÉGALEMENT RESISTANTES. 81

ce du Solide Parabolique au point H, au moment du même Solide au point C, sera composée des raisons de la ligne FL à la ligne PO, ou, prenant les moitiés, de la ligne FK à la ligne PN, & du rectangle DNS au rectangle DKS : Mais par la propriété de la Parabole, la ligne FK est à la ligne PN, comme le rectangle DKS est au rectangle DNS : Donc le moment de la résistance du Solide Parabolique au point H, à son moment au point C, sera en raison composée des raisons du rectangle DKS au rectangle DNS, & du rectangle DNS au rectangle DKS, c'est à dire, en raison d'égalité. Ce qui se pouvant dire en la même manière de tous les points de la base du Solide Parabolique, on peut conclure que les momens de la résistance sont par tout égaux.

J'ay esté bienaïse de vous rapporter les propriétés de ces Solides Paraboliques, afin de vous avertir en même temps, que cette égalité de momens de leurs résistances, ne fait rien du tout au Theoreme de M. Galilée, qui est toujours faux en la manière qu'il l'a proposé, n'ayant jamais, en toutes ses figures & en tous ses raisonnemens, considéré les sections ou coupes des Prismes ou Poutres en autre manière que selon leur hauteur, & jamais selon leur largeur.

Et pour vous ôter le scrupule qui vous peut rester sur cette matière, en sorte que vous ne puissiez plus douter, comme vous faites, qu'un si grand Homme ait pû se méconter ; je veux vous faire voir encore quelques exemples, que j'ay tirez de ses mêmes Dialogues mécaniques, qui me font peine, & que je souhaiterois avoir esté plus clairement expliquez par leur Auteur.

Le premier est celui dont je vous ay dit un mot cy-dessus au texte cotté C, qui fait la 4. Prop. du 2. Dial. des Mech. où il dit, qu'aux Cylindres ou Prismes de même longueur, & de différentes grosseurs, les momens de la résistance croissent en raison triplée des diametres de leurs bases ; c'est à dire, que le moment de la résistance du Cylindre B, est au moment de la résistance du Cylindre A, comme le Cube de la ligne EF, est au Cube de la ligne CD. Fig. 23.
Tab. 8.

Ce qui ne peut pas estre véritable, s'il ne fait abstraction du poids des Cylindres A & B, dont il ne parle pourtant point du tout ; au contraire, par la liaison de cette Proposition avec la précédente, il semble que les momens de la résistance doivent estre considerez, dans cette Proposition, comme les momens du poids ou de la puissance sont considerez dans la 3^e Prop. qu'il conclut en ces termes: *Concludasi per tanto, i momenti delle forze de i Prismi e Cilindri egualmente grossi, ma disegualmente lunghi esser trà di loro in duplicata proporzione di quella delle lor lunghezze, cioè esser come i quadrati delle lunghezze.*

Montreremo adesso nel secondo luogo, secondo qual proporzione cresca la resistenza all'esser spezzati ne i Prismi e Cilindri, mentre restino della medesima lunghezza, e si accresca la grossezza. E qui dico che (Prop. 4.) Ne i Prismi e Cilindri egualmente lunghi, ma disegualmente grossi, la resistenza all'esser rotti cresce in triplicata proporzione de i diametri delle lor grossezze, cioè delle lor basi.

Ce qui fait voir que les momens du poids, ou de la puissance, ayant esté considerez, dans la 3^e Prop., relativement au moment de leur résistance ; les momens de la résistance doivent, par la même raison, estre considerez, dans la 4^e Prop., avec relation aux momens des puissances.

Auquel cas, comme les momens des puissances, dans la 3^e Prop., sont en raison doublée des costez des Cylindres, à cause que le moment de la résistance est le même en l'un & en l'autre ; il faudroit de même, dans la 4^e Prop., que les momens des poids des Cylindres de même longueur & de différente grosseur, fussent toujours égaux, pour conclure que les momens de leurs résistances, sont comme les Cubes des diametres de leurs bases.

Mais comme les momens des poids de ces Cylindres ne sont point égaux, aussi les momens des résistances ne croissent pas, sur cette hypothèse, en la même raison que les Cubes des diametres de leurs bases, mais seulement en celle des mêmes

Fig. 23.
Tab. 8.

diametres. Ce que je démontre en cette manière, après avoir coupé les lignes DG & FH en deux également en K & L, aussi-bien que les deux CD & EF en M & I, & fait FN égale à DM.

La résistance absoluë du Cylindre A, est à la résistance absoluë du Cylindre B, comme la base CD est à la base EF : Et parce que les Cylindres sont de même longueur, ils seront aussi comme leurs bases, aussi-bien que leur poids ; & partant le poids du Cylindre A, sera au poids du Cylindre B, comme la résistance absoluë du Cylindre A, est à la résistance absoluë du Cylindre B. Maintenant, comme le centre de l'action de la résistance absoluë du Cylindre A, fiché dans le mur à angles droits, est au centre de la base M ; & le centre de l'action du poids du même Cylindre A est au point K, en sorte que la résistance absoluë résiste par la ligne DM, & le poids agit par la ligne DK : Si nous supposons que le centre de l'action de la résistance du Cylindre B soit au point N, comme le centre de l'action du poids du même Cylindre est au point L, en sorte que la résistance absoluë du Cylindre B, résiste par la ligne FN égale à la ligne DM, ainsi que le poids du même Cylindre B, agit par la ligne FL égale à la ligne DK ; il n'y aura, dans cette supposition, aucun changement aux raisons des poids ni des résistances ; & le moment de la résistance du Cylindre A en M, sera au moment de la résistance du Cylindre B en N, comme le moment du poids A en K, est au moment du poids B en L ; & en permutant, la raison du moment de la résistance du Cylindre A en M, au moment du poids du même Cylindre A en K, sera égale à la raison du moment de la résistance du Cylindre B en N, au moment du poids du même Cylindre B en L. Mais parce que le centre de l'action de la résistance du Cylindre B est au point I, centre de la base EF ; & le moment de la résistance au point I, est au moment de la résistance au point N, comme la ligne FI à la ligne FN, c'est à dire, DM ; ou prenant leurs doubles, comme le diamètre EF est au diamètre CD ; il s'en suit que le moment de la résistance du Cylindre B en I, au regard du moment du poids B en L, est plus grand que le moment de la résistance du même Cylindre B en N, au regard du même poids B en L ; c'est à dire, (en prenant des raisons égales) plus grand que le moment de la résistance du Cylindre A en M, au regard du poids A en K ; en la même raison que le diamètre EF est plus grand que le diamètre CD : & par conséquent que le moment de la résistance du Cylindre B au regard de son poids, s'est accru sur le moment de la résistance du Cylindre A au regard de son propre poids, en la raison de l'accroissement du diamètre de la base EF sur le diamètre de la base CD, & non pas en la raison des Cubes de ses diametres. Ce qu'il falloit démontrer.

Fig. 23.
Tab. 8.

La même proposition se peut démontrer encore d'une autre manière, après avoir fait que comme le diamètre CD est au diamètre EF, ainsi FL soit à FO.

La raison du moment de la résistance du Cylindre A en M, au moment de la résistance du Cylindre B en I, est composée de la raison de la base CD à la base EF, & de celle du demidiametre DM au demidiametre FI, ou de la ligne CD à la ligne EF. Et la raison du moment du poids du Cylindre A en K, au moment du poids B en O, est composée des mêmes raisons, sçavoir de celle du poids A au poids B, qui est égale à celle de la base CD à la base EF ; & de celle de la ligne DK ou FL à la ligne FO, qui par la construction est la même que celle de CD à EF : Donc le moment de la résistance du Cylindre A en M, sera au moment de la résistance du Cylindre B en I, comme le moment du poids du Cylindre A en K, est au moment du poids du Cylindre B en O : Et en permutant, le moment de la résistance du Cylindre A en M, sera au moment du poids A en K, comme le moment de la résistance du Cylindre B en I, est au moment du poids B en O.

Maintenant, par ce qui a esté démontré par d'autres, que si deux raisons ont un même antecédent, elles seront entre elles comme reciproquement les termes conséquens ;

DE LA COUPE DES POUTRES ÉGALEMENT RESISTANTES. 83
 conséquens ; il s'ensuit que la raison du moment de la résistance du Cylindre B en I au moment du poids B en L, & la raison du même moment de la résistance du Cylindre B en I au moment du même poids B en O, ayans un même antécédent, sçavoir le moment de la résistance du Cylindre B en I ; elles seront entre elles comme réciproquement les termes conséquens, c'est à dire, que le moment de la résistance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en L, fera au moment de la même résistance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en O, comme le moment du poids B en O, est au moment du même poids B en L, c'est à dire, comme la ligne BO est à la ligne BL, ou comme le diamètre EF au diamètre CD ; & partant que le moment de la résistance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en L, sera au moment de la résistance du Cylindre B en I au regard du moment du même poids B en O, comme la ligne EF est à la ligne CD. Mais il a esté montré cy-dessus, que le moment de la résistance du Cylindre A en M au regard du moment du poids A en K, estoit égal au moment de la résistance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en O. Donc le moment de la résistance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en L, sera au moment de la résistance du Cylindre A en M au regard du moment du poids A en K, comme le diamètre EF est au diamètre CD. Ce qu'il falloit démontrer.

Au reste, la vérité du Corollaire qui suit la 4. Prop. & qui dit, que les résistances sont en raison sesquialtere des poids des Cylindres, n'en paroît pas moins, dans cette hypothèse de l'accroissement des résistances en raison des diamètres des bases des Cylindres par relation aux poids, que dans l'autre, où les résistances s'augmentent en raison des Cubes des mêmes diamètres ; si l'on se souvient que les résistances absolües & les poids croissent l'un & l'autre en raison doublée des diamètres, & que les distances de l'action des poids, estant les mêmes à cause de la même longueur des Cylindres, le moment des poids ne s'augmente point : Mais les distances de l'action des résistances s'augmentant en raison des diamètres, à cause de la différence des grosseurs ; il s'ensuit qu'ajoutant cette raison des diamètres à celle des résistances absolües, c'est à dire, à celle des quarrés des mêmes diamètres, il se fera la raison triplée des diamètres pour celle des momens des résistances, qui par conséquent est sesquialtere de celle des momens des poids, qui est demeurée doublée des mêmes diamètres.

Ce que nous venons de dire de la 4. Prop. se peut encore assûrer de la 5. du même Livre, laquelle dit, que *I Cilindri è Prismi di diuersa lunghezza, è grossezza hanno le lor resistenze all'esser rotti di proporzione composta della proporzione de i Cubi de i diametri delle lor basi, e della proporzione delle lor lunghezze permutatamente prese* ; & qui ne peut estre véritable, si l'on ne fait encore abstraction du propre poids des Cylindres, dont M. Galilée ne parle pourtant point du tout, non plus qu'aux précédentes, ny en celles qui suivent. Puisque si l'on considère les momens de la résistance des Cylindres de différentes longueurs & grosseurs relativement aux momens de leurs propres poids, elles ne feront pas, comme il dit, en raison composée de la proportion des Cubes des diamètres de leurs bases, & de celle de leurs costez pris réciproquement ; mais bien en raison composée de la proportion des diamètres des bases, & de celle des quarrés des costez des Cylindres pris réciproquement. Ce que je démontre en cette manière, & sur la fig. de M. Galilée, qui fait la li-
 gne EG égale à BC.

Fig. 24.
 Tab. 8.

La raison du moment de la résistance du Cylindre AC au regard du moment du poids du même Cylindre AC, au moment de la résistance du Cylindre DF au regard du moment du poids du même Cylindre DF, est composée de la raison du moment de la résistance de AC au regard du moment du poids du même AC, au moment de la résistance du Cylindre DG au regard du moment du poids DG, & de la raison du moment de la résistance DG au regard du moment du

Tt

poids DG, au moment de la résistance du Cylindre DF au regard du moment du poids DF. Mais la raison du moment de la résistance de AC au regard du moment du poids de AC, au moment de la résistance de DG au regard du moment du poids DG, est la même que la raison du diamètre AB au diamètre DE, par ce qui a été démontré cy-dessus; & la raison du moment de la résistance du Cylindre DG au regard du moment du poids de DG, au moment de la résistance du Cylindre DF au regard du moment du poids DF, est la même que celle du carré du côté EF au carré du côté EG ou BC, ainsi que je le démontreray cy-dessous. Et partant, la raison du moment de la résistance du Cylindre AC au regard du moment du poids AC, au moment de la résistance du Cylindre DF au regard du moment du poids DF, sera composée des raisons du diamètre AB au diamètre DE, & du carré du côté EF au carré du côté BC. Ce qu'il falloit démontrer.

Or pour faire voir que la raison du moment de la résistance du Cylindre DG au regard du moment du poids du même DG, au moment de la résistance du Cylindre DF au regard du moment du poids du même DF, est égale à celle du carré EF au carré EG; je dis ainsi. Les raisons des momens de la résistance des deux Cylindres DG & DF aux momens de leurs poids, ayant un même antécédent, savoir le moment de la résistance, qui est le même en tous les Cylindres de même grosseur; elles seront entre elles comme les termes conséquens pris réciproquement, (par ce qui a été démontré par d'autres.) C'est à dire, que la raison du moment de la résistance du Cylindre DG au moment du poids du même DG, fera à la raison du moment de la résistance du Cylindre DF au moment du poids du même DF, comme réciproquement le moment du poids du Cylindre DF, est au moment du poids du Cylindre DG. Mais par la 2^e Prop. de M. Galilée, le moment du poids de DF, est au moment du poids de DG, comme le carré du côté EF, est au carré du côté EG: Donc le moment de la résistance du Cylindre DG au regard du moment du poids du même DG, fera au moment de la résistance du Cylindre DF au regard du moment du poids du même DF, comme le carré du côté EF, au carré du côté EG ou BC.

Il y a encore une manière de raisonner, qui fait peine, dans son 3. Dial. où, après avoir fort bien dit, *Motum aequaliter seu uniformiter acceleratum dico illum, qui à quiete recedens, temporibus aequalibus aequalia celeritatis momenta sibi superaddit.* Il fait un discours excellent pour l'explication de cette définition, contre laquelle en suite il se fait faire une objection, qu'il résout en cette sorte.

Sagr. *Per quanto per ora mi si rappresenta all' intelletto, mi pare che con chiarezza forse maggiore si fusse potuto definire senza variare il concetto: Moto uniformemente accelerato esser quello nel quale la velocità andasse crescendo secondo che cresce lo spazio che si va passando: si che per essemplio il grado di velocità acquistato dal mobile nella scesa di quattro braccia, fusse doppio di quello ch'egli hebbe, sceso che fù lo spazio di due, è questo doppio del conseguito nello spazio del primo braccio. Perche non mi par che sia da dubitare, che quel grave, che viene dall'altezza di sei braccia, non habbia, è perquota con impeto doppio di quello che hebbe, sceso che fù tre braccia, è triplo di quello che hebbe alle due, è sescuplo dell' havuto nello spazio di uno. Salu. Io mi consolo assai d'haver havuto un tanto compagno nell' errore; è più vi dirò, che il vostro discorso ha tanto del verisimile, è del probabile, che il nostro medesimo Autore non mi negò, quando glielo proposi, d'esser' egli ancora stato per qualche tempo nella medesima fallacia. Mà quello, di che io poi sommamente mi maravigliai, fù il vedere scoprir con quattro semplicissime parole, non pur false, mà impossibili due proposizioni, che hanno del verisimile tanto, che havendole io proposte à molti, non hò trovato, chi liberamente non me l'ammettesse. Simpl. Veramente io sarei del numero de i conceditori, è che il grave descendente, Vires acquirat eundo, crescendo la velocità à ragion dello spazio, è che il grave dell' istesso percuziente sia doppio venendo da doppia altezza, mi paiono proposizioni da concedersi senza repugnanza, è controversia. Salu. E pur son tanto false e impossibili, quanto che*
il

il moto si faccia in un instante. Et eccò vene chiarissima dimostrazione. Quando le velocità hanno la medesima proporzione, che gli spazij passati ò da passarsi, tali spazij vengon passati in tempi eguali; se dunque le velocità, con le quali il cadente passò lo spazio di quattro braccia, furono doppie delle velocità, con le quali passò le due prime braccia (si come lo spazio è doppio dello spazio) adunque i tempi di tali passaggi sono eguali; mà passare il medesimo mobile le quattro braccia, e le due nell'istesso tempo, non può haver luogo fuor che nel moto instantaneo. Mà noi veggiamo, che il grave cadente fa suo moto in tempo, & in minore passa le due braccia, che le quattro. Adunque è falso, che la velocità sua cresca come lo spazio. L'altra proposizione si dimostra falsa con la medesima chiarezza, &c. Sagr. Troppa evidenza, Troppa agevolezza è questa, con la quale manifestate conclusioni ascoste; Questa somma facilità, &c. Qui fait paroître que la solution de cette objection luy plaist extraordinairement; & il en fait tant de cas, qu'il ne peut quasi se lasser d'en exagerer la beauté.

Et cependant je vous avouë franchement la foiblesse de mon esprit, qui ne l'a pû jusqu'icy comprendre en aucune manière, quelque soin que j'aye pris de mediter sur son raisonnement, lequel au contraire m'a toujours paru faux, & paralogistique en sa forme, quoy qu'il soit tres-veritable en sa matière.

Et pour vous faire voir mon sentiment, je vous diray que pour avoir démontré, dans la 2^e Prop. du mesme Dial. au commencement, lors qu'il a expliqué les propriétés du mouvement égal & uniforme, que *si spatia sint ut velocitates, tempora erunt æqualia*; Je ne voy pas pour cela, que parlant des propriétés du mouvement accéléré, (permettez-moy de me servir de ce terme) il ait pû dire, que *quando le velocità hanno la medesima proporzione che gli spazij passati, ò da passarsi, tali spazij vengon passati in tempi eguali*. Ce qui peut estre absolument nié, puisque ces mouvemens sont si differens, qu'il n'y a aucune connexité entre ces deux Propositions, & ce qui convient à l'un, peut absolument ne pas convenir à l'autre. Et cependant c'est de cette Majeure, que M. Galilée tire ces conséquences qui ravissent M. Sagredo, & qui font qu'il s'écrie avec tant d'emportement, *Troppa Evidenza, troppa agevolezza, &c.*

Que si l'on veut dire qu'il a pû argumenter sur les propriétés du mouvement accéléré, comme il a fait sur celles du mouvement égal & uniforme, par ce qu'il démontre un peu au dessous dans la 1. Prop. de l'accéléré, que *Tempus in quo aliquod spatium à mobili conficitur latrone ex quiete uniformiter acceleratâ, est æquale tempori in quo idem spatium conficeretur ab eodem mobili motu æquabili delato, cujus velocitatis gradus, subduplus sit ad summum & ultimum gradum velocitatis prioris motus uniformiter accelerati*. Qui fait voir la relation qu'il y a entre les deux mouvemens; & que, pour ce qui regarde les temps & les espaces, ce qui se dit de l'un, peut estre proportionnellement entendu de l'autre.

Je répondray que ce discours, quelque veritable qu'il soit en soy-mesme, ou, comme on dit dans les Ecoles, par sa matière, il est toujours faux dans sa forme; & le Paralogisme ne fait que changer de nom, en ce que cy-dessus on pouvoit l'appeller, comme on dit en Logique, *à non causâ tanquam à causâ*, & icy à *petitione Principij*. Puisque cette première proposition du mouvement accéléré, supposant & estant fondée sur la définition contestée, il n'est pas juste de vouloir démontrer celle-cy par l'autre.

Voilà donc les Observations que j'ay faites sur ces matières, que je ne vous rapporte point avec un esprit de Critique, ou d'un homme qui ne cherche que ce qui peut estre repris dans les plus beaux Ouvrages, puis qu'il n'y a peut-estre personne au monde, qui ait plus d'amour & d'estime pour tout ce qui vient de M. Galilée que moy, qui ay eû l'honneur d'estre de ses derniers Disciples, & qui ay travaillé depuis tant d'années à estendre cette Doctrine de la résistance des Solides dont il est l'Inventeur, & qu'il a renfermée dans un si petit nombre de propositions; ayant pour ce sujet composé le Livre que vous avez veû prest à estre

donné au public il y a plus de douze ans, que j'appelle *Galilæus Promotus de resistentiâ Solidorum*; & qui pouvant quelque jour estre mis en lumière, fera assez connoître ma reconnoissance, & le respect que je porte à la memoire de ce grand Homme, que nostre bon Amy M. Gassendi appelloit ordinairement le Platon de nostre siècle.

Ce n'est donc pas dans le dessein de rien censurer dans ses Ecrits que je vous ay marqué mes sentimens; mais seulement pour vous faire voir que ce n'est pas miracle, que dans le nombre infini de meditations toutes divines, dont il a remply ses Ouvrages, quelques petites bagatelles comme celles-cy, luy soient échappées sans y avoir pris garde.

Ce qui est, à mon avis, tout ce que je devois vous dire, pour vous tirer des doutes qui vous estoient venus sur la lecture de mon écrit: Et si dans tout ce discours vous trouvez encore quelque chose qui ne vous satisfasse pas entièrement, il faudra que nous nous en entretenions plus particulièrement ensemble; & que sur le Livre mesme de M. Galilée j'essaie de me mieux expliquer que je n'ay pû faire dans les raisonnemens que je vous ay communiquez, où j'ay eû le malheur de ne me sçavoir pas si nettement faire entendre.

Et c'est une des principales raisons qui m'ont fait estendre un peu plus au long dans cette Lettre, & rapporter quantité de passages aux mesmes termes de M. Galilée; puisque dans cette question il seroit toujours fâcheux de tomber dans l'inconvenient, où une autre de pareille nature a jetté dans ces derniers temps les plus beaux esprits de l'Europe. Et d'autant plus, qu'en cette matière il n'y a point de Formulaire à signer, & que l'on peut impunément douter du veritable sentiment de M. Galilée, sans courir aucun danger d'estre soupçonné de Jansenisme, ou d'avoir mauvaise opinion de l'infaillibilité du Saint Siège. Adieu, Monsieur; conservez-moy toujours l'honneur de vos bonnes graces. A Paris ce 18. Juillet 1661.

A P A R I S.

DE L'IMPRIMERIE ROYALE;

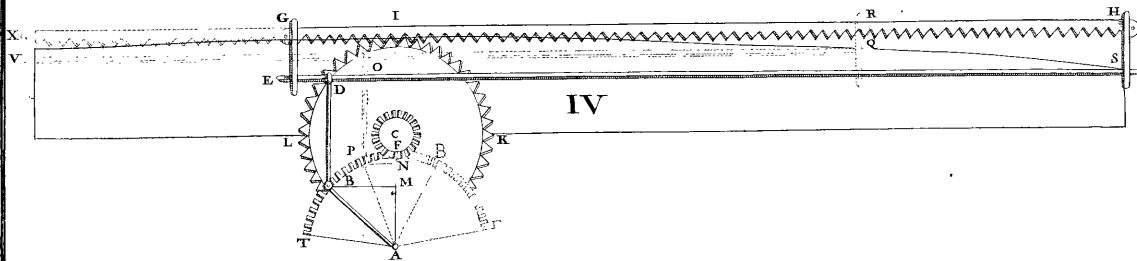
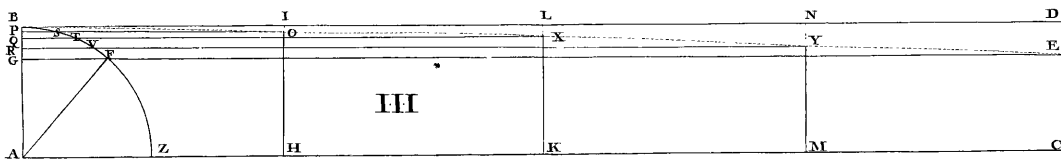
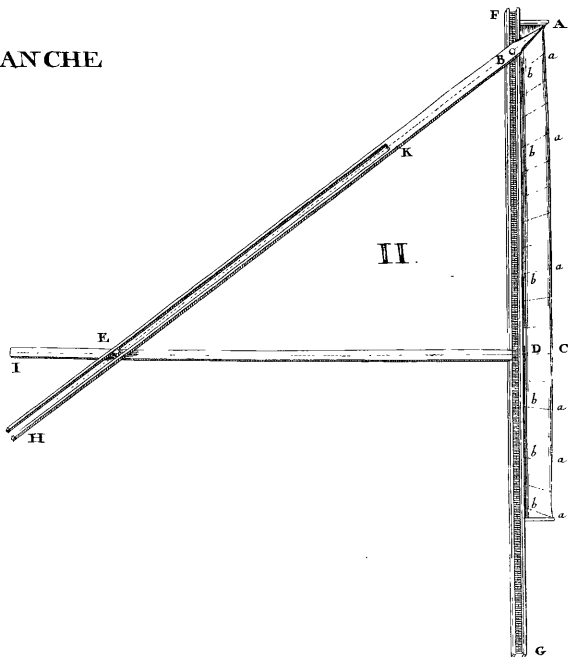
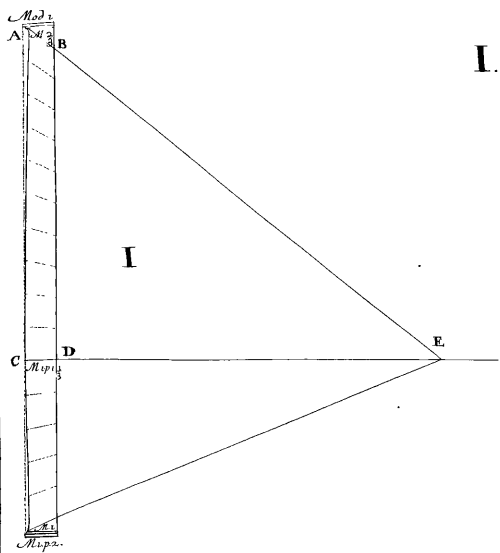
Par les soins

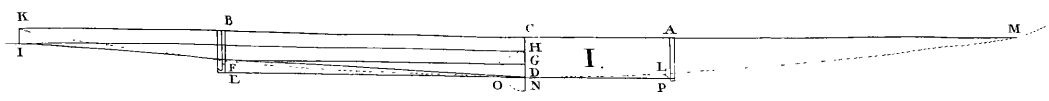
DE SEBASTIEN MABRE-CRAMOISY,

Directeur de ladite Imprimerie.

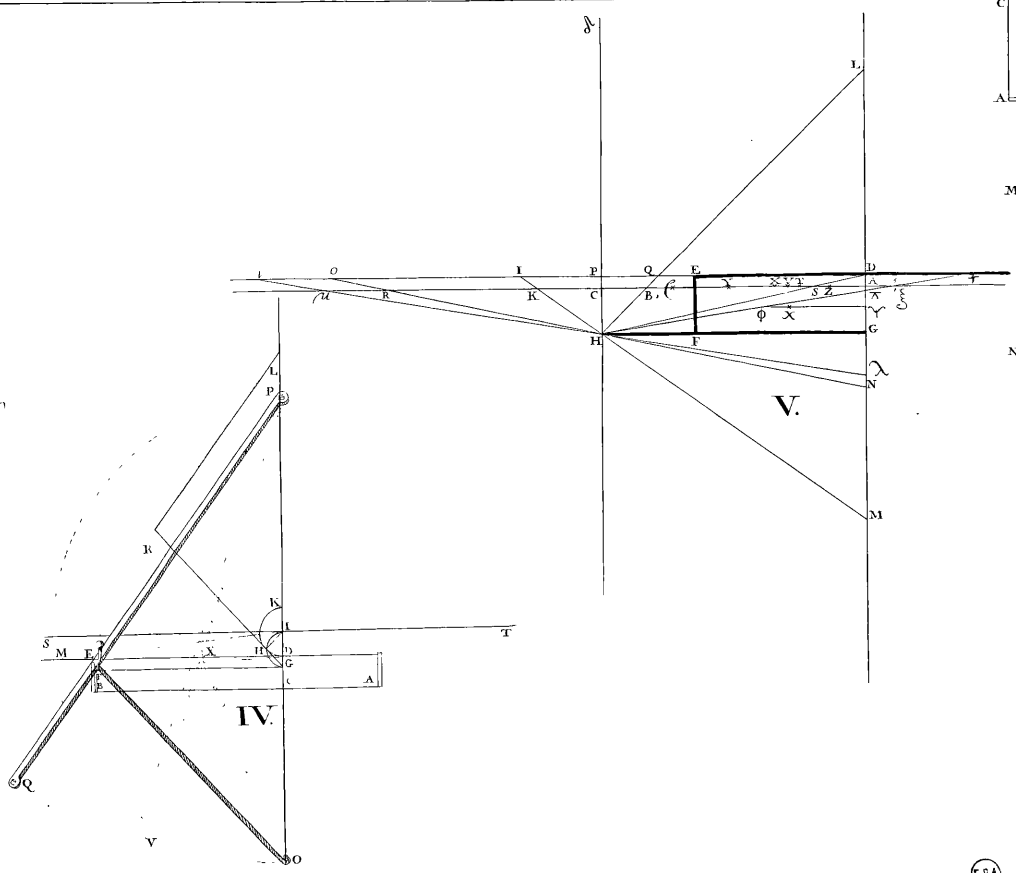
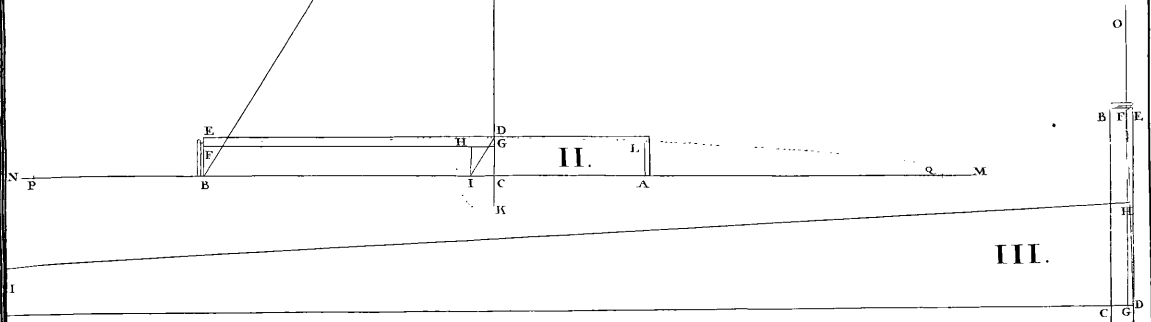
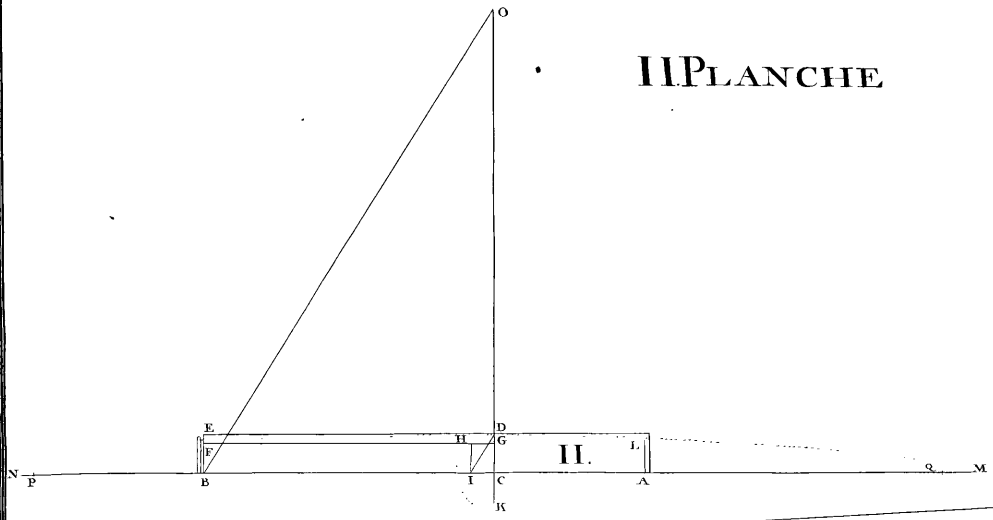
M. DC. LXXIII.

I. PLANCHE



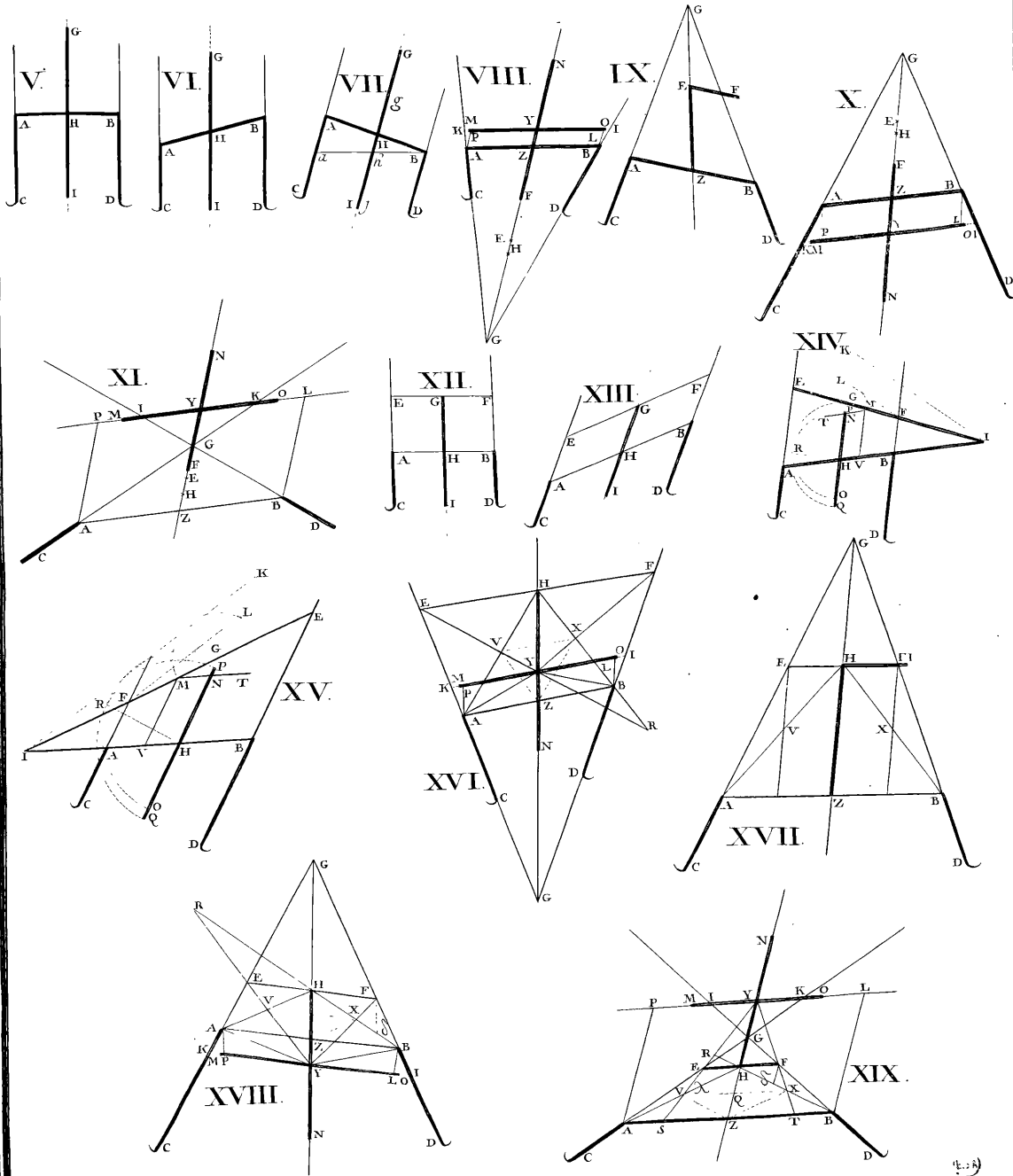
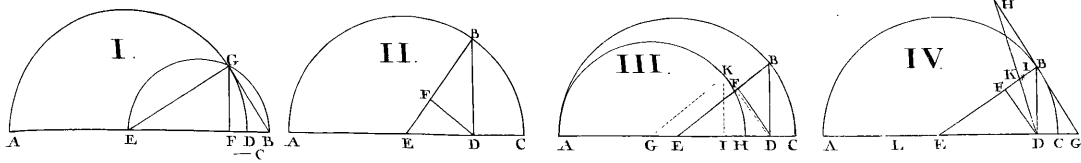


II PLANCHE



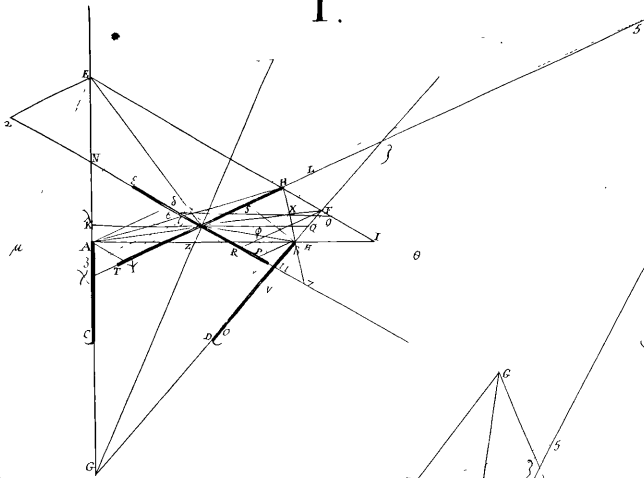
(E.B.A.)

III PLANCHE

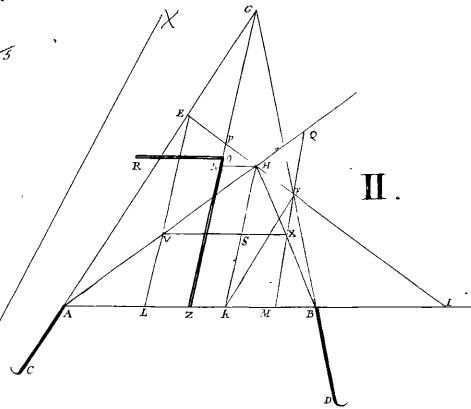


IV. PLANCHE .

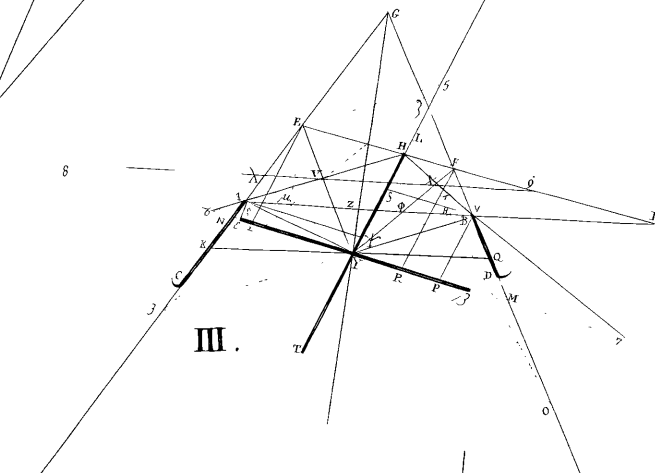
I.



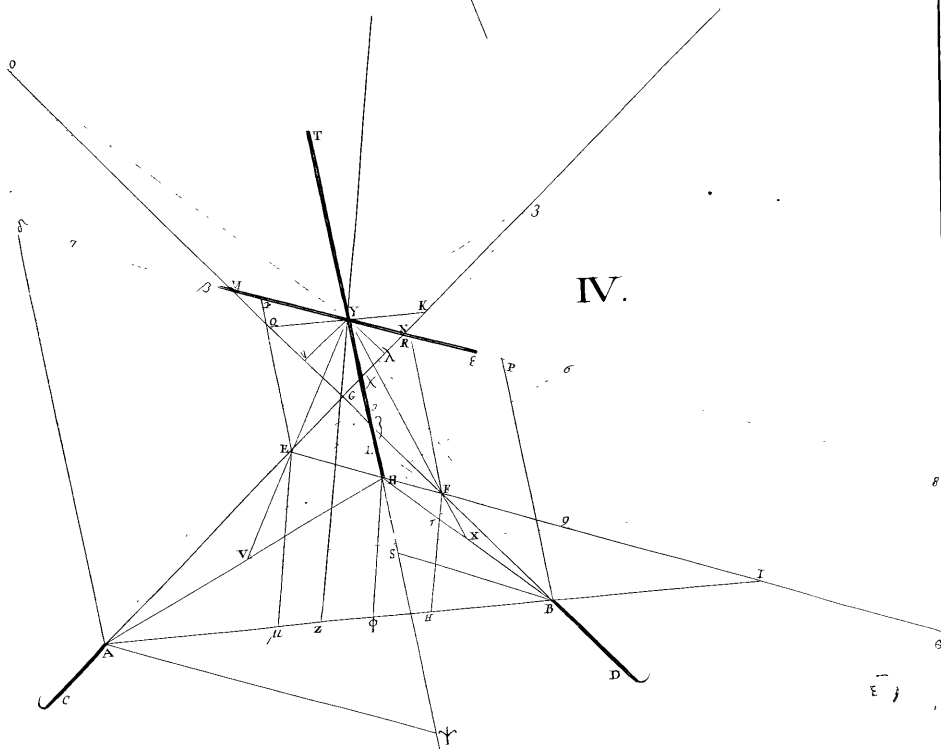
II.



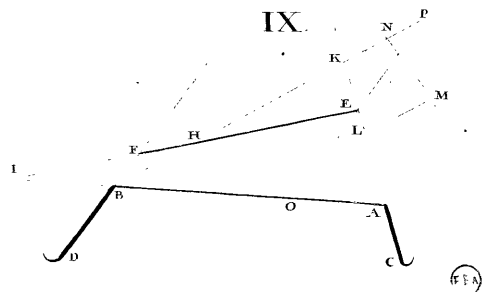
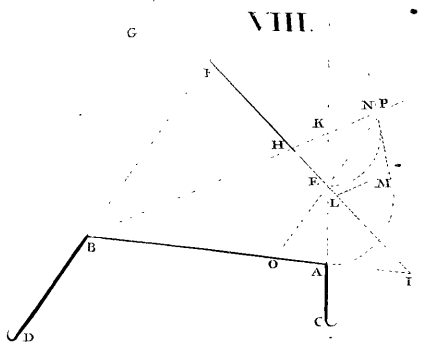
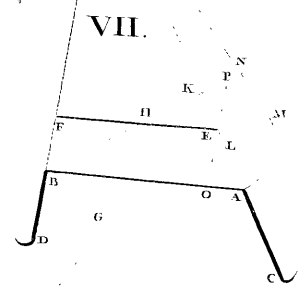
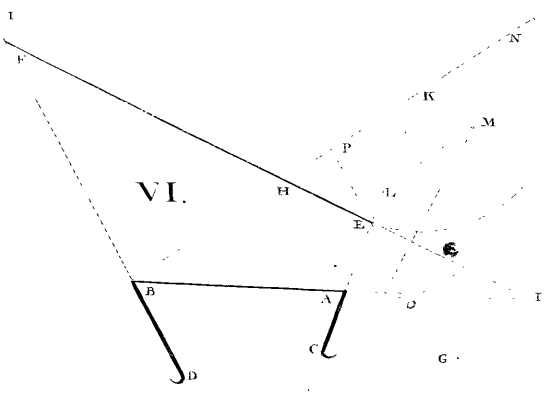
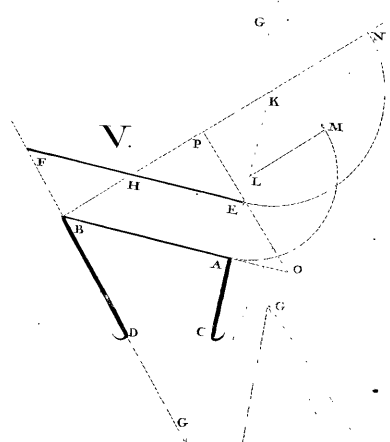
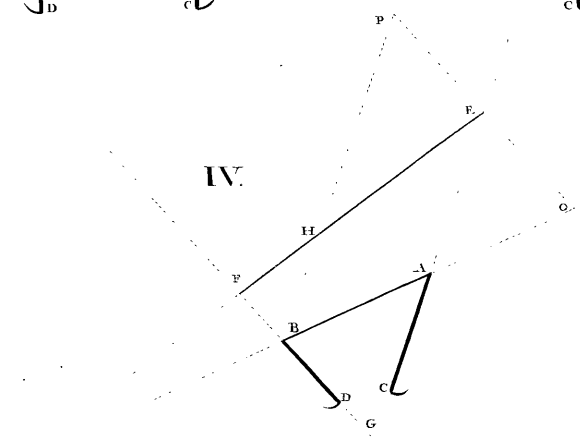
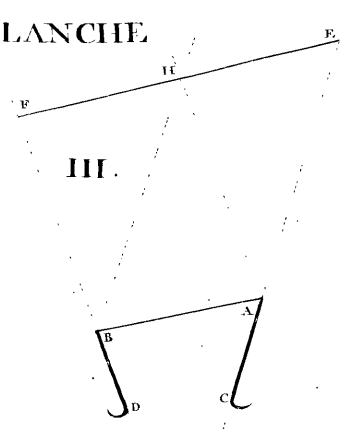
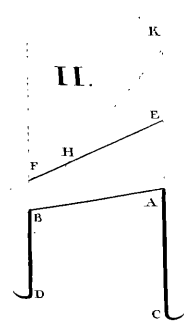
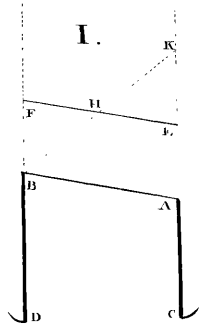
III.



IV.

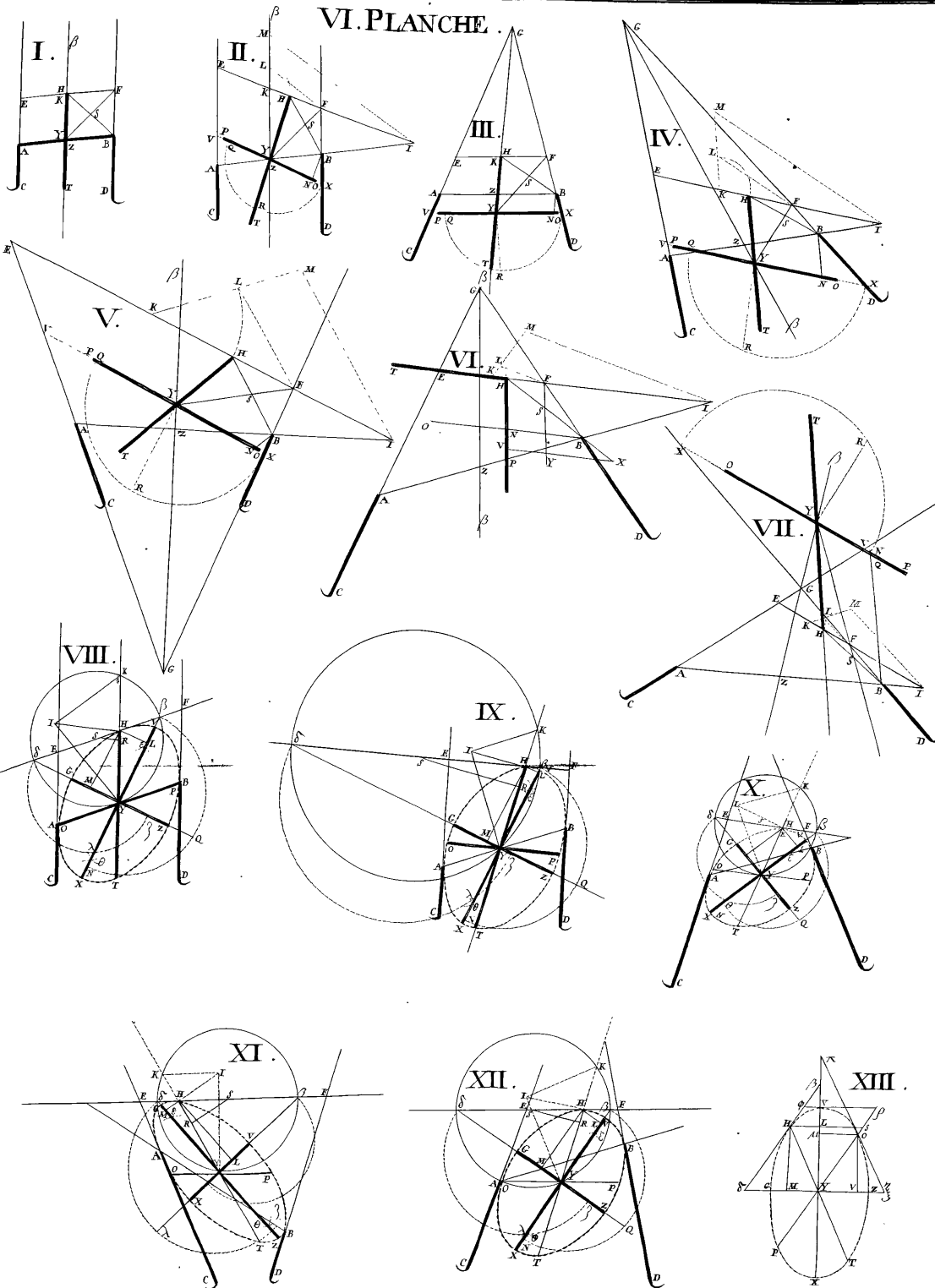


V. PLANCHE

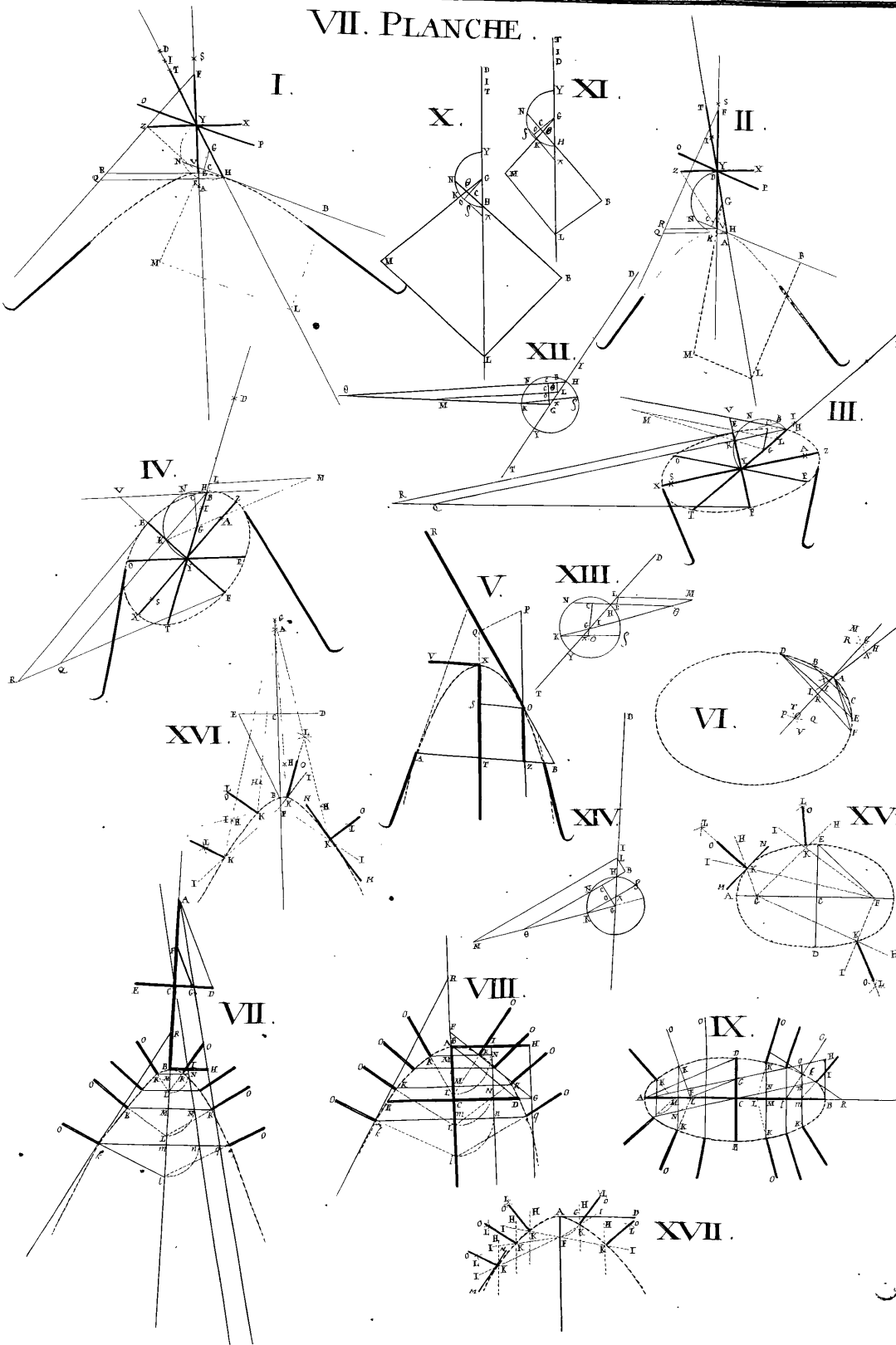


De la Boissiere fait

VI. PLANCHE



VII. PLANCHE.



VIII. PLANCHE.

